

UNIVERSIDADE DO MINHO

Escola de Engenharia

Departamento de Engenharia Mecânica

***ANÁLISE CINEMÁTICA E DINÂMICA DE MECANISMOS
COM RECURSO A MEIOS COMPUTACIONAIS***

Integrado nas Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica

de

João Paulo Flores Fernandes

sob orientação do

Professor Doutor José Carlos Pimenta Claro

Guimarães, Fevereiro 2000

ADENDA

Preâmbulo

De forma a evitar a permanência definitiva de inexatidões que pudessem ser consideradas graves, chegou-se à conclusão que seria desejável proceder à rectificação de algumas incorrecções/gralhas.

Alterações

- Página 22, 17^a linha, onde se lê “cos ϕ ”, deve ler-se “sen ϕ ”.
- Página 43, 15^a linha, a expressão $v_{24} = v_{23} \frac{O_{12}O_{14}}{O_{12}O_{23}}$, deve ser substituída por $v_{24} = v_{23} \frac{O_{12}O_{24}}{O_{12}O_{23}}$.
- Página 45, no gráfico da figura 29a), as expressões Δx e Δt devem trocar de posição.
- Página 50, 3^a linha, onde se lê “varáveis”, deve ler-se “variáveis”.
- Página 90, na nota de rodapé 34, onde se lê “segudior”, deve ler-se “seguidor”.
- Página 99, na nota de rodapé 37, onde se lê “extremanete”, deve ler-se “extremamente”.

Agradecimentos

O autor deseja manifestar o seu reconhecimento a todos aqueles que, de algum modo, contribuíram para a realização deste trabalho. É, no entanto, devida especial referência:

- ao Professor Doutor José Carlos Pimenta Claro, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade do Minho, supervisor deste trabalho, pela oportunidade e confiança proporcionadas ao autor, para a realização deste estudo, pelo seu precioso e permanente apoio, orientação, ajuda e estímulo;
- ao Professor Doutor Sousa Miranda e ao Doutor José Gomes que, pela partilha de alguns recursos e pelas suas oportunas opiniões, muito contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho;
- ao Engenheiro Joaquim Barbosa, ao Dr. Artur e à Dr^a Assunção, pelo apoio e colaboração generosamente demonstrados e pelas palavras de encorajamento e incentivos nos momentos mais difíceis;
- a todos os colaboradores do Departamento de Engenharia Mecânica que, pela camaradagem, solidariedade e apoio que demonstraram, também muito contribuíram para a realização deste trabalho;
- à minha família e amigos, companheiros neste percurso, pelo apoio e encorajamento manifestados.

BEM HAJAM! A TODOS O MEU MUITO OBRIGADO!

1. Introdução

1.1. Generalidades

A bibliografia existente não é unânime relativamente à classificação/divisão da Mecânica.

Uma classificação que se julga pertinente e abrangente é a apresentada na figura 1, e será com base neste critério de classificação que se irá desenvolver este trabalho. Tal como se referiu anteriormente, a Mecânica pode dividir-se em três disciplinas: a Estática, a Cinemática e a Dinâmica.

A Estática é a disciplina que estuda as leis de composição das forças e as condições de equilíbrio dos corpos materiais submetidos à acção de forças e/ou momentos. O conhecimento de tais condições permite estudar a estabilidade das estruturas. Na prática, a análise estática é válida e aplicável quando as velocidades e acelerações em jogo são baixas. Para velocidades elevadas, a análise dinâmica é mais apropriada, uma vez que os efeitos de inércia das massas em movimento têm uma importância preponderante nos esforços totais envolvidos.

A Cinemática é a área da Mecânica que se ocupa das leis do movimento dos corpos independentemente das causas que o provocam. Neste tipo de análise apenas se estudam os aspectos puramente geométricos do movimento, não sendo considerados os esforços envolvidos neste processo. Definir cinematicamente um mecanismo ou formular a lei do movimento de um corpo é estabelecer, para cada instante, a posição, a velocidade e a aceleração, em relação a um referencial previamente escolhido.

Por outro lado, a cinemática serve de base à dinâmica, uma vez que o estabelecimento das relações cinemáticas é necessário ao estudo do movimento dos corpos submetidos à acção de forças. Foi por isso, que face às exigências da indústria, em particular a mecânica, em constante desenvolvimento, a cinemática se tornou, na primeira metade do século XIX, num ramo independente na mecânica. [54]

Dentro da cinemática deve distinguir-se a análise cinemática da síntese cinemática. A primeira, também designada cinemática directa, significa a determinação das características cinemáticas de um mecanismo, ao passo que a síntese cinemática, ou cinemática inversa, consiste em determinar a configuração que um mecanismo deve ter para produzir um movimento com características previamente especificadas.

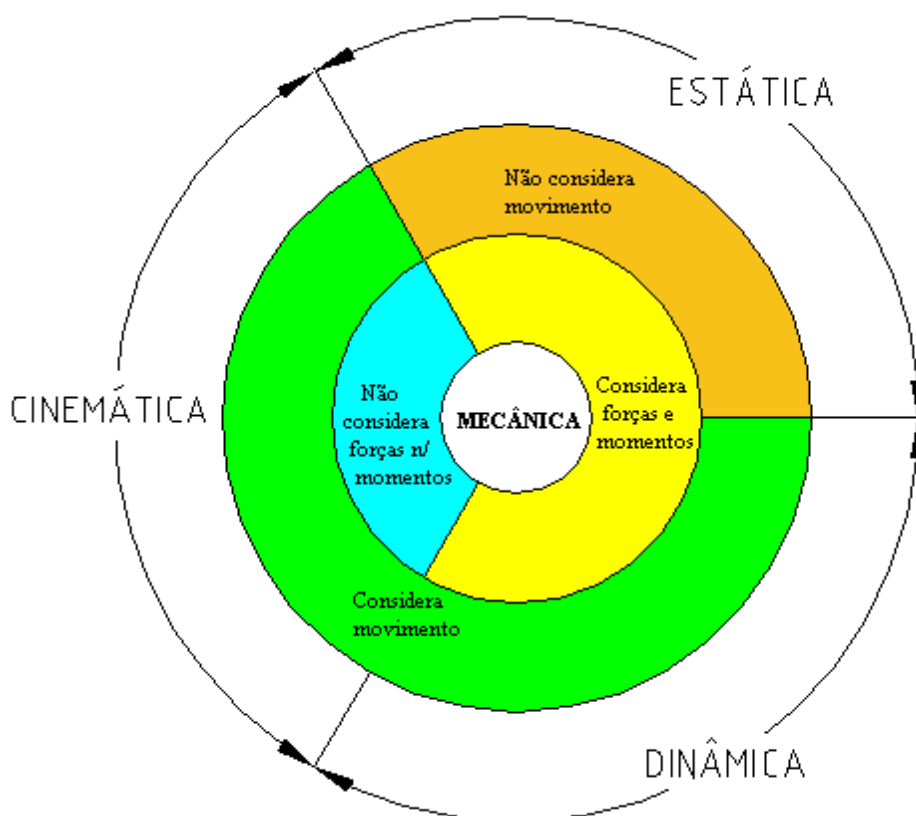


Fig.1 – Divisão/Classificação da Mecânica.

Por último, a Dinâmica dedica-se ao estudo da relação entre o movimento dos corpos e as acções/causas que o provocam. Ao contrário da cinemática, na dinâmica, ao estudar-se o movimento dos corpos, consideram-se não só os esforços que actuam sobre os corpos, mas também a sua inércia/massa. A dinâmica permite prever o movimento causado por determinadas acções ou vice-versa.

O estudo dinâmico baseia-se em leis que generalizam resultados de inúmeras experiências e observações feitas com o movimento dos corpos. Estas leis foram sistematizadas e formuladas pela primeira vez por Newton na sua obra “*Pincipia*”, publicada em 1687.

A primeira lei – lei da inércia – enuncia-se da seguinte maneira: *um corpo, sem qualquer influência exterior, permanece no seu estado de repouso ou de movimento rectilíneo e uniforme, enquanto não for obrigado a modificar esse estado pela acção de forças aplicadas.*

A segunda lei – lei fundamental da dinâmica – indica que *o produto da massa do corpo pela aceleração que lhe imprime uma dada força é igual, em módulo, a essa força, sendo o sentido da aceleração o mesmo que o da força.*

A terceira lei – lei da igualdade da acção e da reacção – estabelece que *dois corpos exercem um sobre o outro forças de igual grandeza, com a mesma direcção mas de sentidos opostos*.

Quando se projecta um sistema mecânico, ou quando se analisa um sistema já existente, o problema pode dividir-se em duas partes distintas mas intimamente relacionadas. Em primeiro lugar, as dimensões de cada um dos componentes e a sua ligação devem permitir que cada um tenha o seu próprio e determinado movimento. Em segundo lugar, cada um dos componentes deve ser capaz de resistir cabalmente às solicitações que sobre eles actuam. Por tudo isso, a cinemática e a dinâmica, que conjuntamente formam a Mecânica Aplicada, desempenham um papel preponderante no estudo dos mecanismos e das máquinas.

A Mecânica Aplicada – também designada Teoria das Máquinas e dos Mecanismos – é, pois, a ciência que tem por objectivo estudar as leis que regem os movimentos – em termos de deslocamento, velocidade, aceleração e impulso – dos diversos membros que constituem os mecanismos e as máquinas, bem como dos esforços – forças e momentos – que esses mesmos membros transmitem.

1.2. Oportunidade e Pertinência do Tema

Desde a Antiguidade que o Homem emprega as máquinas e mecanismos para substituir o esforço humano, nomeadamente, na agricultura, na caça, etc., onde o Homem se foi provendo de ferramentas apropriadas. Actualmente, podem encontrar-se sistemas mecânicos (máquinas, mecanismos, etc.) nas mais variadas áreas, tais como, a agricultura, a indústria (têxtil, metalomecânica, informática...), etc.

Os novos processos tecnológicos, aliados à crescente mecanização e automatização nos mais diversos domínios, exigem cada vez mais estabilidade dos sistemas mecânicos. O desempenho e a fiabilidade de tais sistemas são, normalmente, limitados pelas suas características cinemáticas e dinâmicas, tornando premente e importante novos desenvolvimentos no domínio da Mecânica Aplicada.

Com efeito, sabe-se que o desempenho dos sistemas mecânicos pode, quase sempre, ser melhorado através da utilização de novos materiais (lubrificantes mais eficazes, materiais estruturalmente mais resistentes, etc.), e do aperfeiçoamento das tecnologias da produção, que conduzem a uma cada vez menor dispersão das propriedades, quer dos materiais, quer dos componentes mecânicos, o que contribui para o aumento da fiabilidade das máquinas. Sabe-se também que um conhecimento das características cinemático-dinâmicas dos mecanismos mais rigoroso conduz a projectos mais fiáveis e capazes de melhores prestações, uma vez que reduz as margens de incerteza na previsão do seu comportamento em serviço.

As frequentes mudanças das gamas de fabrico - que a evolução do mercado pressiona e exige, e que a progressiva evolução dos sistemas de produção possibilita - acarretam o encurtamento dos prazos aceitáveis para a elaboração e para a execução de novos projectos. Os investigadores das áreas da produção têm correspondido positivamente a este desafio, investindo na tipificação e na análise exaustiva das operações fundamentais de fabrico, com vista à rápida planificação e optimização da produção. É, então, natural que a Mecânica Aplicada procure acompanhar esta evolução da área da produção, proporcionando métodos de análise e de síntese dos mecanismos e das máquinas.

Os notáveis avanços no domínio da informática, numa primeira fase através do desenho assistido por computador, têm conduzido a melhorias significativas no processo projecto-fabrico (por detecção de erros de concepção, na redução de tempos de fabrico, nas facilidades de comunicação, entre outros). Torna-se, portanto, fundamental conhecer o comportamento

cinemático-dinâmico dos sistemas mecânicos para se obterem projectos/produtos eficientes e fiáveis a preços competitivos.

Tradicionalmente, o estudo cinemático e dinâmico das máquinas e mecanismos implicava a identificação de fases críticas de funcionamento correspondentes a posições específicas, geralmente associadas a pontos de inversão do movimento, às quais é aplicada uma análise puramente geométrica, resolúvel por métodos analíticos, gráficos, empíricos, etc. Para geometrias simples, e uma vez estabelecidas as equações de deslocamentos dos vários elementos, é exequível a análise para um número elevado de posições intercalares, através da utilização de meios de cálculo automático, obtendo-se uma aproximação ao funcionamento do mecanismo.

Actualmente, torna-se possível recorrer a programas computacionais suficientemente versáteis para analisar mecanismos substancialmente complexos a partir da sua definição geométrica e do tipo de accionamento. De facto, as aplicações informáticas especificamente desenvolvidas para o estudo cinemático e dinâmico de sistemas mecânicos são uma realidade no panorama industrial mundial.

As vantagens inerentes à utilização destes programas computacionais, associadas a preços concorrenciais e à vulgarização do *hardware*⁵, fazem prever que, nos próximos anos, cresça o interesse por parte da indústria nacional, com especial destaque para os sectores da metalomecânica e da electromecânica, neste tipo de programas.

⁵ *Hardware* é todo o equipamento físico (dispositivos mecânicos, eléctricos, electrónicos) que constitui o computador. [11]

1.3. Campo de Aplicações

O estudo cinemático e dinâmico de mecanismos, englobado na área mais vasta da Mecânica Aplicada, tem como propósito a análise do movimento, em termos de deslocamento, velocidade, aceleração e impulso, assim como dos fenómenos associados à transmissão de forças e momentos, em sistemas mecânicos.

Esta análise abarca desde os sistemas mais comuns em mecânica (componentes de máquinas rotativas e alternativas, estruturas móveis, sistemas biela-manivela, gruas, etc.) até às aplicações de grande precisão de posicionamento (aplicações electromecânicas, automação, robótica, etc.) passando por simulações antropomórficas utilizadas em biomecânica (com especial incidência no estudo das condições de funcionamento de próteses).

A análise de mecanismos, numa primeira fase, torna possível a determinação das situações mais desfavoráveis a que estão sujeitos os vários componentes e, conseqüentemente, o seu dimensionamento⁶.

Não menos importante, contudo, é a informação relativa à variação dos esforços com o movimento, imprescindível ao estudo de fenómenos cujas conseqüências se reflectem, de uma forma notória, no projecto, tais como:

- o comportamento à fadiga dos componentes;
- a geração e transmissão de fenómenos vibratórios;
- a caracterização do contacto entre as superfícies móveis;
- a resposta transiente e dinâmica dos pares cinemáticos envolvidos.
- etc.

⁶ Por dimensionamento entende-se o estabelecimento das dimensões características dos elementos que constituem os sistemas mecânicos, de modo a que estes possam resistir satisfatoriamente durante toda a sua vida aos esforços aplicados.

1.4. Plano de Trabalho

O plano de trabalho inicialmente estabelecido, e que na sua generalidade foi seguido pelo autor, era constituído por cinco fases principais, que, em seguida, se enumeram:

- Pesquisa bibliográfica relativa aos métodos elementares e tradicionais de cálculo utilizados no estudo cinemático e dinâmico de mecanismos;
- Pesquisa bibliográfica e de campo, relativa ao âmbito potencial de aplicação, industrial e de I&D, de métodos automáticos de cálculo cinemático-dinâmico de mecanismos;
- Exploração das possibilidades do *software*⁷ existente na simulação de situações comuns de aplicação concreta em mecânica, envolvendo pares cinemáticos fechados e abertos;
- Aferição de resultados obtidos pelo *software* com valores obtidos por métodos tradicionais;
- Redacção do relatório.

A elaboração deste relatório constitui, deste modo, a última etapa de um trabalho de síntese sobre um tema actual e de grande importância para o estudo de mecanismos.

⁷ *Software* é todo o programa computacional. [11]

2. Técnicas de Análise de Mecanismos

2.1. Métodos Analíticos

A utilização dos métodos analíticos torna-se imprescindível quando a análise de um mecanismo exige o estudo de várias fases do seu movimento.

Estes métodos, para além de serem mais precisos e exactos do que os métodos gráficos, apresentam outra vantagem que se prende com o facto de que, uma vez obtidas as expressões para a posição, a velocidade, etc. de um determinado mecanismo, ser possível estudar a influência dos vários parâmetros no movimento global produzido, tais como, o comprimento, a posição angular, etc., dos elementos que compõem o mecanismo. Este procedimento é particularmente relevante na síntese de mecanismos.

Os principais inconvenientes dos métodos analíticos são a difícil detecção de eventuais erros e a impossibilidade de visualização dos resultados obtidos em termos do movimento global do mecanismo.

Com efeito, associando a estes métodos o processamento computacional, a análise de mecanismos ganha, por um lado, precisão (uma vez que se minimizam os erros inerentes aos métodos analíticos - os erros de truncatura) e, por outro, economia de tempo. Os programas mais comumente utilizados podem dividir-se em dois grupos: as folhas de cálculo (EXCEL, LOTUS123, etc.) e as linguagens de programação (BASIC, C, FORTRAN, AutoLISP, etc.). A utilização destes recursos está limitada a mecanismos simples, uma vez que, para mecanismos complexos, o controlo de todos os parâmetros de cálculos se torna difícil. Convém salientar, ainda, os programas computacionais que auxiliam a resolução de problemas de matemática avançada, tais como, obtenção de funções derivadas, resolução de sistemas matriciais, etc.

2.2. Métodos Gráficos

Os métodos gráficos, sendo expeditos e suficientemente rigorosos para a maioria das aplicações correntes, apresentam o inconveniente de serem válidos única e exclusivamente para a geometria e posição em que são traçados. Com efeito, a grande utilidade destes métodos resume-se ao estudo de casos particulares, sendo, todavia, excessivamente trabalhosos e morosos na análise de mecanismos.

Uma outra desvantagem da análise gráfica prende-se com a falta de exactidão. Por esta razão, durante este trabalho, deu-se particular atenção aos métodos analíticos e, principalmente, aos métodos computacionais, não deixando todavia de utilizar os métodos gráficos sempre que se entendeu pertinente e que, de certa forma, fossem igualmente relevantes para o objectivo deste trabalho, em particular na análise cinemática.

Os métodos gráficos são usados com alguma frequência porque possibilitam a visualização do movimento do mecanismo em análise. Estes métodos foram numa primeira fase utilizados na análise estática e dinâmica, e, só posteriormente, na análise cinemática. Os primeiros estudos de mecanismos baseavam-se nestes métodos, e utilizavam as técnicas e equipamentos tradicionais, o que tornava os resultados algo imprecisos. Contudo, o recente desenvolvimento de sistemas de desenho assistido por computador, vulgo CAD⁸ (AutoCAD, ProEngineer, SolidWorks, entre outros), trouxe não só um aumento da precisão, como também uma maior economia de tempo. Uma das grandes vantagens dos sistemas de CAD consiste no facto de não necessitarem de um factor de escala, uma vez que o limite físico da área de desenho é, teoricamente, infinito. Com a utilização dos sistemas de CAD minimizam-se os erros de execução e de leitura na análise gráfica.

⁸ CAD – acrónimo de *Computer Aided Design*.

2.3. Métodos Computacionais

A análise cinemática e dinâmica de mecanismos pode ainda ser feita com o auxílio de programas computacionais, especialmente desenvolvidos para este propósito, e que se baseiam em soluções obtidas por aproximações sucessivas. Uma vez que estas soluções resultam da aplicação de métodos numéricos⁹, os resultados obtidos são sempre aproximados, e cujo grau de aproximação e exactidão depende de vários factores, tais como método de integração, do intervalo de integração, etc. Intervalos de integração pequenos originam maior exactidão nos resultados, no entanto, prejudicam o tempo de processamento.

Estes programas permitem ao projectista simular (desenhar, avaliar e visualizar) o movimento de um dado mecanismo, sem necessidade de recorrer à construção de um protótipo físico. De facto, são inúmeras as vantagens inerentes à utilização destes programas, das quais se podem destacar a criação de modelos virtuais, o dimensionamento de componentes, a funcionalidade/operabilidade dos componentes, a flexibilidade e facilidade de processamento de informação, a economia de materiais, de tempo e de dinheiro.

Os passos a seguir na análise de mecanismos não diferem muito de programa para programa. Assim, desde a construção do modelo até à visualização do movimento do mecanismo, podem-se resumir os seguintes passos:

- definir a geometria de cada um dos elementos que compõem o mecanismo;
- caracterizar o tipo de ligação entre os vários elementos;
- introduzir as características físicas dos componentes (massa, forças aplicadas, etc.);
- especificar os actuadores (tipo de gerador de movimento, molas, etc.);
- analisar o mecanismo (estática, cinemática e dinâmica);
- testar o movimento global do mecanismo.

Estes passos são apresentados sob a forma de um fluxograma, tal como ilustra a figura 2. Obviamente que cada programa contém as suas particularidades e especificidades que os caracterizam e diferenciam.

⁹ Os métodos numéricos de uso corrente são: o método de Euler mais simples e rápido e o método de Kutta-Merson mais exacto e mais lento.

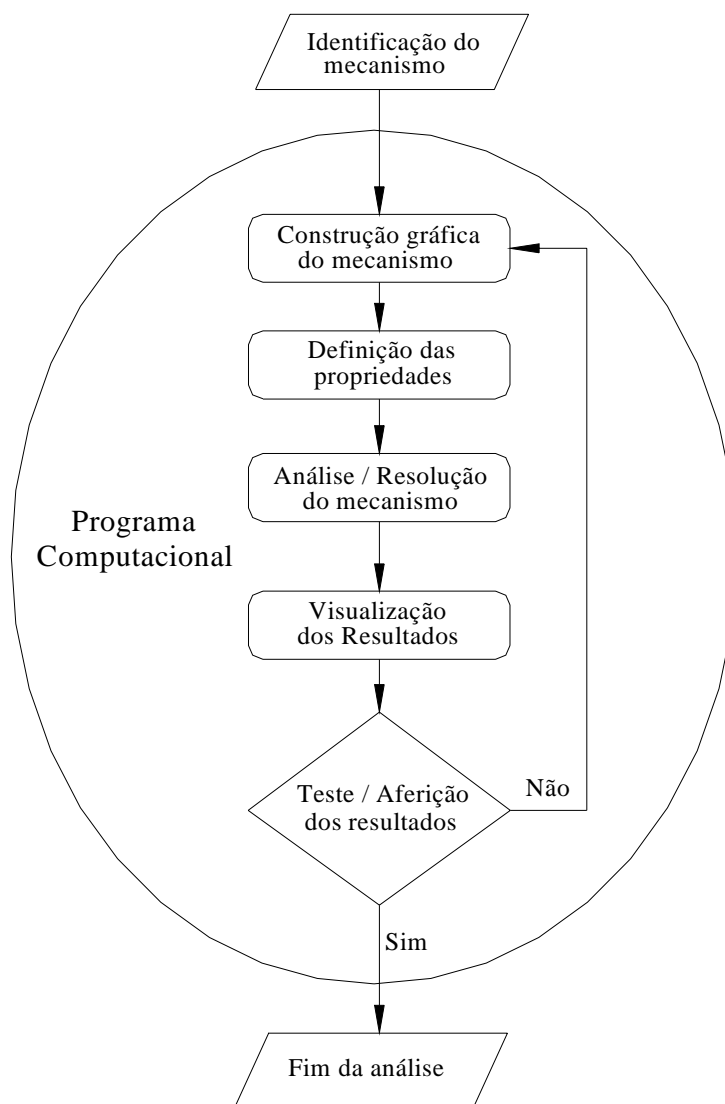


Fig.2 – Fluxograma básico que evidencia os vários passos a seguir nos diversos programas computacionais dedicados à análise de mecanismos.

3. Análise Descritiva de Mecanismos

3.1. Pares Cinemáticos

Para que o movimento possa ser transmitido, finalidade básica de um mecanismo, há que ligar os seus elementos entre si. O conjunto das superfícies que estabelece o contacto designa-se par cinemático.

Os pares cinemáticos¹⁰ podem classificar-se segundo três critérios básicos, a saber: [48]

- quanto à forma;
- quanto ao contacto;
- quanto ao movimento permitido.

Se a forma dos elementos é tal que, supondo um deles fixo, as trajectórias de todos os pontos do órgão a que o outro elemento pertence são completamente determinadas, o par diz-se fechado (*e.g.* mecanismo biela-manivela). Se assim não for, o par diz-se aberto (*e.g.* mecanismo came-seguidor), sendo, neste caso, necessária uma força exterior para manter o contacto permanente entre os dois elementos.

Quanto ao contacto, os pares cinemáticos podem ser superiores ou inferiores, conforme aquele é pontual ou linear (figura 3a), ou superficial (figura 3b). Como é evidente, na prática não existem pares superiores em virtude das deformações que ocorrem nas zonas de contacto.

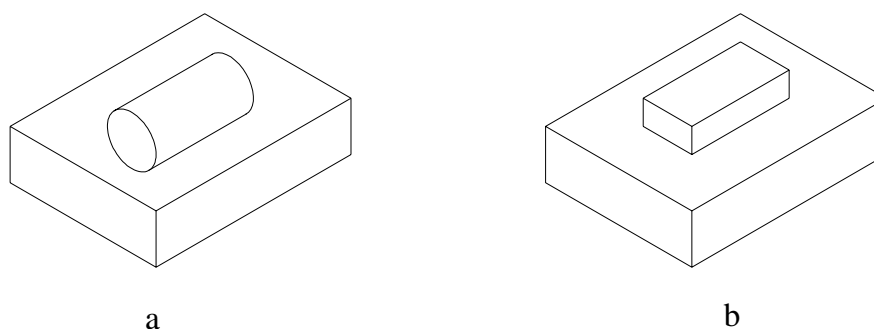


Fig. 3 - a) Par cinemático superior b) Par cinemático inferior. {adaptado de [24]}

¹⁰ Quanto ao movimento permitido, nesta descrição apenas se apresentam os pares cinemáticos que possibilitem a classificação dos mecanismos biela-manivela e came-seguidor.

No que diz respeito ao tipo de movimento permitido, vários são os tipos de par cinemático dos quais se salientam:

- rotóides: que permitem aos órgãos rodar ou oscilar num só plano e são habitualmente denominados de articulações;
- deslizantes: quando o movimento relativo dos dois órgãos é de translação; o órgão fixo designa-se de guia e o móvel de corredeira.

Os pares cinemáticos representam-se, usualmente, por uma letra maiúscula, que simboliza o tipo de movimento permitido, seguida pelos números das ligações correspondentes. É com base nesta notação que se classificam os pares cinemáticos dos mecanismos biela-manivela e came-seguidor.

Assim, por exemplo, R_{12} representa um par cinemático rotóide entre as ligações 1 e 2, e T_{34} simboliza um par cinemático translacional ou deslizante entre as barras 3 e 4.

3.2. Graus de Liberdade

Um corpo considerado livre no espaço tridimensional pode ter movimento de translação e/ou de rotação em relação aos três eixos coordenados (Cf. fig.4). Cada uma destas possibilidades designa-se de grau de liberdade. Um corpo no espaço tridimensional tem, portanto, seis graus de liberdade. Com efeito, pode definir-se grau de liberdade ou mobilidade como o número mínimo de coordenadas necessário para descrever o movimento (ou a configuração) de um mecanismo.

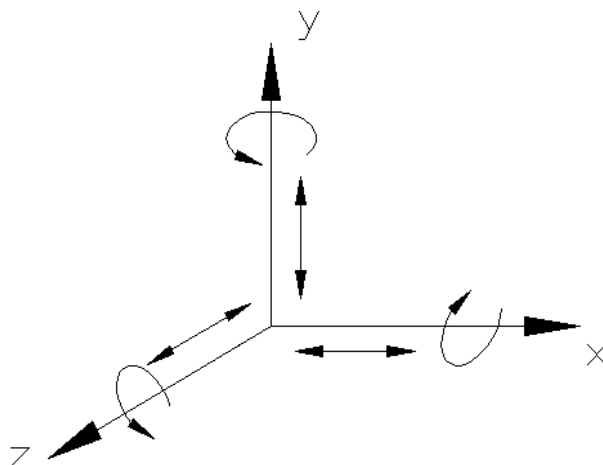


Fig.4 – Graus de liberdade no espaço tridimensional.

O número de graus de liberdade pode reduzir-se introduzindo constrangimentos. Assim, um corpo que se desloque livremente no plano possui apenas três graus de liberdade, a saber: translação segundo os dois eixos coordenados pertencentes ao plano, e rotação em torno de um eixo normal ao plano. Deste modo, um sistema formado por dois corpos, não ligados, no plano possui seis graus de liberdade.

A figura 5 ilustra os corpos 1 e 2 unidos por intermédio de um par rotóide centrado em B. Dado que B é comum aos dois corpos, o deslocamento de B no corpo 1 é o mesmo que o deslocamento de B no corpo 2.

O deslocamento de A no corpo 1 pode ser definido em função das coordenadas (x_A, y_A) . O deslocamento do ponto B, relativamente a A, é função do ângulo (θ_1) , que define a posição angular do segmento de recta AB, de comprimento fixo. Em relação ao ponto B, o deslocamento de C pode ser expresso em função do ângulo (θ_2) , ângulo que define a posição angular do segmento de recta BC, atendendo a que o comprimento (l_2) é fixo. Para caracterizar a posição do ponto C são necessárias quatro variáveis independentes, e que são (δx_A) , (δy_A) , $(\delta \theta_1)$ e $(\delta \theta_2)$. Um sistema formado por dois corpos ligados por uma articulação tem, portanto, quatro graus de liberdade. Pode, deste modo, concluir-se que um par cinemático rotóide retira dois graus de liberdade.

Se se considerar, agora, (n) corpos ligados entre si por (p) pares cinemáticos rotóides, ditos pares primários, o sistema por eles formado tem $(3n-2p)$ graus de liberdade, isto é, cada corpo separadamente possui três graus de liberdade e cada articulação remove dois desses graus de liberdade.

Contudo, os sistemas deste tipo raramente são utilizados sem adicionar outro tipo de constrangimentos. Um dos corpos é, em geral, fixo. Este corpo tem, por isso, zero graus de liberdade. Deste modo, observa-se que um sistema formado por (n) corpos, sendo um deles fixo, ligados por (p) pares rotóides tem $[3(n-1)-2p]$ graus de liberdade.

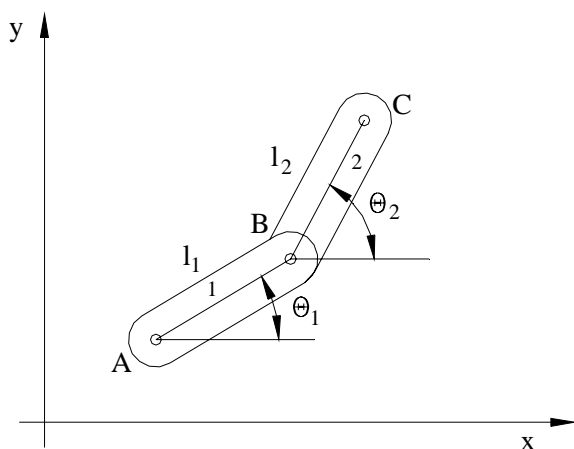


Fig.5 – Par cinemático primário retira dois graus de liberdade {adaptado de [19]}.

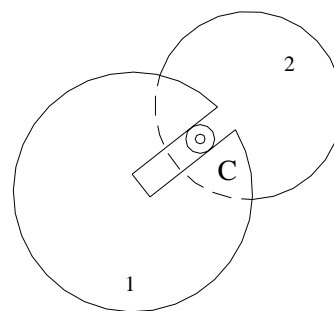


Fig.6 – Par cinemático secundário retira um grau de liberdade {adaptado de [19]}.

Dois corpos podem, ainda, ser ligados por intermédio de um par cinemático secundário. Os corpos 1 e 2 da figura 6 ilustram este tipo de ligação. O pino C do corpo 2 é fixo podendo mover-se ao longo da ranhura do corpo 1. Pode observar-se que o único movimento constrangido ao ponto C é o movimento na direcção perpendicular à da ranhura do corpo 1. Conclui-se, pois, que os pares cinemáticos secundários retiram apenas um grau de liberdade.

Com efeito, o número de graus de liberdade de um sistema formado por (n) corpos rígidos, sendo um deles fixo, é dado por:

$$\text{GDL} = 3(n-1) - 2p - q \quad (1)$$

onde: n representa o número de ligações/corpos do mecanismo;

p é número de pares primários, *i.e.*, retiram dois graus de liberdade;

q é número de pares secundários *i.e.*, apenas retiram um grau de liberdade.

Pela análise da expressão (1), que traduz o critério de Grübler¹¹, também designado equação de Kutzbach, pode concluir-se que o número de graus de liberdade depende do número de ligações, do número de juntas e do tipo de interacção entre estes. [32,50,51]

Ao aplicar-se o critério de Grübler, se o número de graus de liberdade for nulo ou negativo, significa que não se trata de um mecanismo (este terá sempre pelo menos um grau de liberdade) mas sim de uma estrutura, respectivamente isostática ou hiperstática/redundante. Neste último caso, o número de graus de liberdade será o grau de redundância ou hiperstaticidade da estrutura.

Para sistemas fechados, ao número de graus de liberdade corresponde igual número de geradores de movimento. Contudo, em sistemas abertos a aplicação do critério de Grübler resulta em graus de liberdade passivos ou redundantes, sendo necessário neste caso uma actuação exterior (a gravidade, uma mola) para evitar a separação do mecanismo.

O critério de Grübler pode, salvo algumas excepções, ser aplicado para determinar o número de graus de liberdade dos mecanismos de uso corrente. [26,48]

¹¹ Não obstante o critério adoptar este nome, é reconhecido, inclusivé por Grübler, que Chebyshev e Sylvester foram os pioneiros no estudo da mobilidade de sistemas mecânicos. [24,31]

3.3. Eixos e Centros Instantâneos de Rotação

Quando um corpo roda no espaço tridimensional em relação a outro corpo pode considerar-se a existência de um eixo comum de rotação, cuja posição relativamente aos dois corpos pode ou não variar de instante para instante. A estes eixos dá-se o nome de eixos instantâneos de rotação.

Para movimentos planos, os eixos instantâneos de rotação são sempre perpendiculares ao plano do movimento e intersectam os corpos num ponto que se designa de centro instantâneo de rotação (CIR).

Sabe-se que a velocidade de um ponto de um corpo rígido relativamente a outro ponto do mesmo corpo tem direcção perpendicular ao segmento de recta que une os dois pontos considerados. Este teorema pode demonstrar-se recorrendo ao método de redução ao absurdo, provando que a velocidade relativa de dois pontos de um corpo rígido não pode ter componente segundo o segmento que os une.

As principais propriedades dos CIR's resumem-se deste modo:

- CIR é um ponto de um corpo em torno do qual roda o outro corpo;
- a velocidade do CIR é a mesma quer se considere o ponto pertencente a um ou outro corpo;
- o conhecimento da posição do CIR permite calcular imediatamente a velocidade de qualquer ponto da ligação;
- inversamente, conhecidas as velocidades de dois quaisquer pontos de um corpo, a posição do CIR determina-se facilmente pela intersecção das normais aos vectores velocidade tirados nesses pontos.

O número de CIR's de um mecanismo é igual ao número de combinações binárias que se pode estabelecer entre os seus corpos. Assim, se (n) for o número de corpos, o número de CIR's é dado pela seguinte expressão:

$$i = C_2^n = \frac{n(n-1)}{2} \quad (2)$$

A determinação da posição dos CIR's pode ser feita por simples inspecção, pelo teorema dos três centros ou de Aronhold-Kennedy combinado com o teorema da normal comum.

A figura 7 ilustra alguns exemplos de localização de CIR's determinados por simples inspecção.

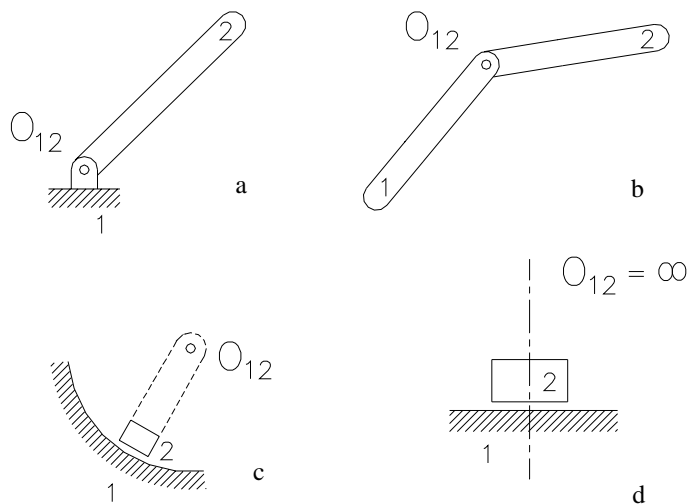


Fig. 7 – Exemplos onde a localização dos centros instantâneos de rotação se determina por simples inspecção directa.

O teorema dos três centros ou de Aronhold-Kennedy estabelece que: *quando três corpos têm movimento relativo existem três CIR's situados sobre a mesma recta*. O teorema da normal comum pode enunciar-se da seguinte maneira: *o centro instantâneo de rotação de dois corpos em contacto directo segundo um ponto situa-se na normal comum aos dois corpos no ponto de contacto*. [50,51]

4. Estudo de um sistema fechado – O mecanismo biela-manivela

4.1. Descrição do Mecanismo

O mecanismo biela-manivela é, provavelmente, o mais comum dos mecanismos utilizados em mecânica devido à sua simplicidade e versatilidade.

Este mecanismo pode ser considerado como um caso particular do mecanismo de quatro barras, cuja ligação movida tem comprimento infinito. Na prática, a ligação movida transforma-se numa corrediça ou num pistão, constrangida de forma a mover-se segundo uma linha recta, por meio de guias ou de cilindro.

A figura 8 ilustra esquematicamente o mecanismo biela-manivela bem como os diversos elementos que o compõem: o bloco (1), a manivela (2), a biela (3) e a corrediça ou pistão (4).

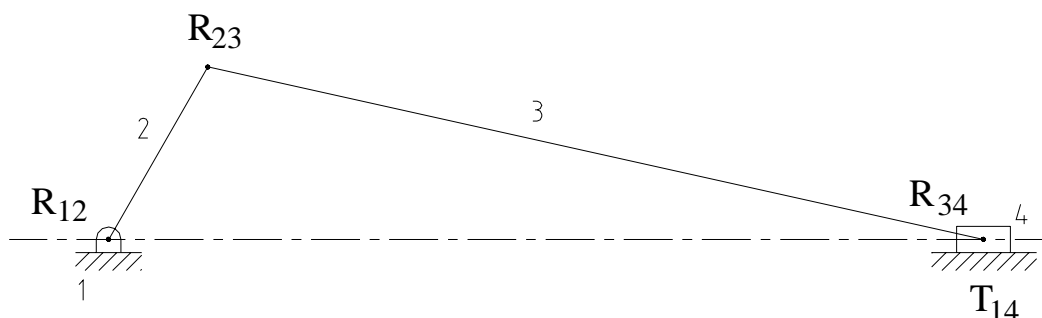


Fig.8 – Representação esquemática do mecanismo biela-manivela.

Este mecanismo apenas admite movimentos planos. A manivela descreve somente o movimento plano de rotação, a corrediça descreve apenas movimento de translação rectilínea e a biela tem um movimento plano geral ou misto (translação e rotação), isto é, os pontos desta ligação têm, simultaneamente, as características dos movimentos de translação e de rotação.

O mecanismo biela-manivela é largamente utilizado em sistemas mecânicos, sendo uma das suas principais aplicações nos motores de combustão interna. Nestes motores, a corrediça é o pistão sobre o qual os gases exercem pressão, que é transmitida à manivela por intermédio da biela. Os dois pontos mortos, nas posições extremas do pistão, são superados pela instalação de um volante de inércia no eixo da manivela. Este mecanismo emprega-se também, frequentemente, em compressores de ar, onde a manivela recebe o movimento de rotação, por exemplo, de um motor eléctrico, sendo transformado em movimento alternativo de translação que comprime o ar.

De acordo com o que foi apresentado na secção 3.1., os pares cinemáticos do mecanismo biela-manivela da figura 8 caracterizam-se da seguinte forma:

- par cinemático R_{12} : rotóide inferior fechado;
- par cinemático R_{23} : rotóide inferior fechado;
- par cinemático R_{34} : rotóide inferior fechado;
- par cinemático T_{14} : deslizante inferior fechado.

No que respeita ao número de graus de liberdade, e aplicando o critério de Grübler dado pela expressão (1), conclui-se que o mecanismo biela-manivela tem um grau de liberdade.

A determinação e localização dos CIR's do mecanismo biela-manivela baseia-se nos conceitos referidos em 3.3. Assim, aplicando a expressão (2), o número de centros instantâneos de rotação é

$$i = C_2^4 = \frac{4(4-1)}{2} = 6$$

e que são: O_{12} , O_{23} , O_{34} , O_{14} , O_{24} e O_{13} .

Por simples inspecção é possível localizar os centros O_{12} , O_{23} , O_{34} e O_{14} . Falta determinar a localização dos centros O_{24} e O_{13} .

Agrupando as ligações 1, 2 e 3, e as ligações 1, 3 e 4, tem-se, respectivamente, os centros O_{12} , O_{23} e O_{13} , e os centros O_{13} , O_{34} e O_{14} . Pelo teorema dos três centros, os centros O_{12} , O_{23} e O_{13} têm que estar situados sobre a mesma linha recta. O mesmo se passa em relação aos centros O_{13} , O_{34} e O_{14} . Observa-se, então, facilmente que o centro O_{13} se situa na intersecção das rectas definidas pelos centros $O_{12}O_{23}$ e $O_{34}O_{14}$ (Cf. figura 9).

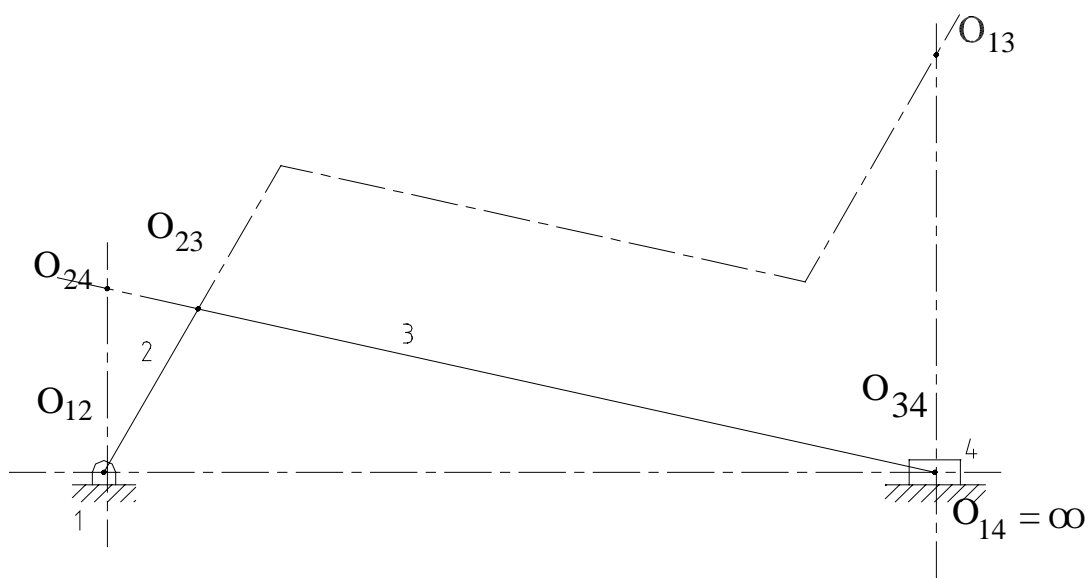


Fig.9 – Determinação e localização dos centros instantâneos de rotação do mecanismo biela-manivela.

Isolando agora as ligações 2, 3 e 4 e as ligações 1, 2 e 4, observa-se a existência dos centros O_{23} , O_{34} e O_{24} , e O_{12} , O_{14} e O_{24} , donde, analogamente, o centro O_{24} fica situado na intersecção das rectas definidas pelos centros $O_{23}O_{34}$ e $O_{12}O_{14}$ (Cf. figura 9).

Um processo alternativo, simples e expedito, que permite determinar a localização dos centros instantâneos de rotação, é o que a seguir se expõe.

Em primeiro lugar, indicam-se as ligações como ilustra a figura 10a. De seguida, marcam-se os centros conhecidos, ou seja, os centros que se determinam por inspecção directa, unindo-se por um segmento as respectivas ligações (fig. 10b). Note-se que os segmentos que faltam determinar são segmentos comuns a dois triângulos. Da figura 10c observa-se que o segmento O_{13} é um lado comum aos triângulos 134 e 123, pelo que o CIR O_{13} se obtém através da intersecção de $O_{12}O_{23}$ com $O_{14}O_{34}$.

Analogamente, verifica-se que o CIR O_{24} se obtém pela intersecção de $O_{12}O_{14}$ com $O_{23}O_{34}$.

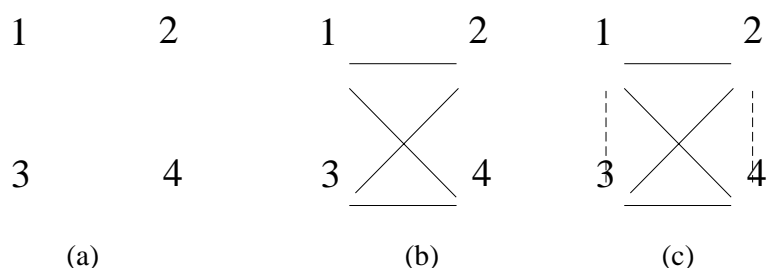


Fig. 10 – Método expedito que permite determinar os centros instantâneos de rotação.

4.2. Análise Cinemática

4.2.1. Métodos Analíticos

4.2.1.1. Método Algébrico

O método algébrico consiste, essencialmente, na dedução de uma expressão analítica que traduz a posição/geometria de um determinado elemento, em função das características geométricas do mecanismo.

Assim, considere-se o mecanismo biela-manivela da figura 11, sobre o qual se pretende deduzir as expressões que traduzem a posição, a velocidade e a aceleração do pistão (ponto C).

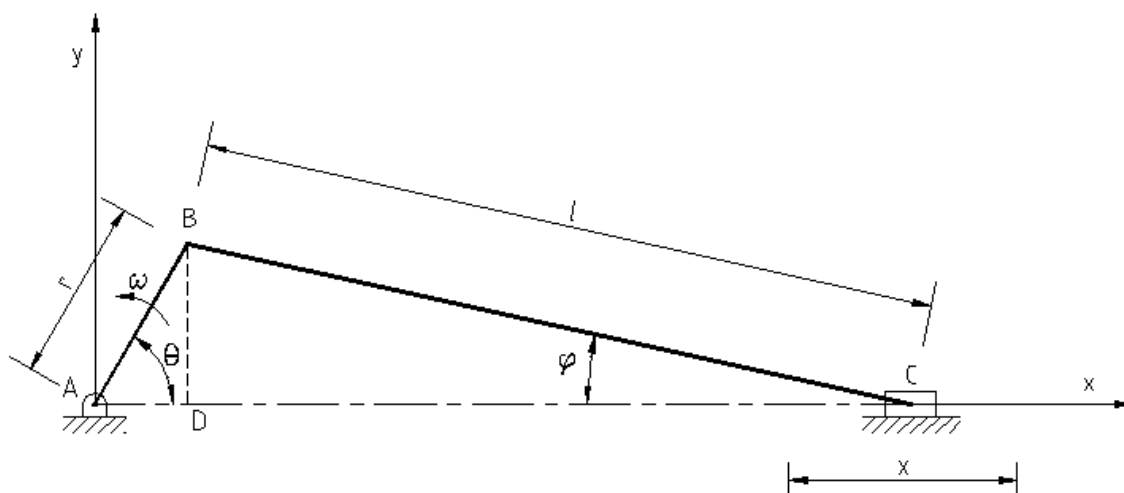


Fig.11 – Representação esquemática do mecanismo biela-manivela.

No presente estudo, admite-se que a manivela (AB) roda com velocidade constante, isto é, $\omega = \dot{\theta} = \text{constante}$, ou seja, $\theta = \omega t$.

Assim, atendendo à geometria da figura 11, pode escrever-se a seguinte expressão para a posição do pistão/ponto C:

$$x = AC = AD + DC = r \cdot \cos\theta + l \cdot \cos\varphi \quad (3)$$

Deve, agora, relacionar-se os ângulos θ e φ com o propósito de eliminar a variável φ .

Assim, vem que:

$$BD = r \cdot \sin\theta = l \cdot \sin\varphi$$

$$\text{Então } \sin\varphi = (r \cdot \sin\theta)/l \quad (4)$$

Substituindo a equação (4) na lei fundamental da trigonometria:

$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, obtém-se:

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \cdot \sin^2 \theta} \quad (5)$$

Então, substituindo a equação (5) em (3) obtém-se a expressão da posição do pistão em função da posição angular da manivela e das dimensões da manivela e da biela;

$$x = r \cdot \cos \theta + l \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \cdot \sin^2 \theta}$$

Porém, como $\theta = \omega t$ vem que:

$$x = r \cdot \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \omega t} \quad (6)$$

A expressão (6) permite determinar, em cada instante, a posição do pistão.

Derivando¹² uma e outra vez a expressão (6), em ordem ao tempo, obtém-se, respectivamente, a expressão da velocidade e da aceleração do pistão:

Assim, $v = \dot{x}$

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \left(r \cdot \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \omega t} \right)'$$

$$v = -\omega \cdot r \cdot \sin \omega t - \frac{\omega \cdot r^2 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t}{\sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \omega t}} \quad (7)$$

Diferenciando, agora, a expressão (7), resulta a equação que permite calcular a aceleração do pistão:

$a = \dot{v}$

$$a = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \left(-\omega \cdot r \cdot \sin \omega t - \frac{\omega \cdot r^2 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t}{\sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \omega t}} \right)'$$

¹² A notação \dot{x} , abreviatura de dx/dt , foi original e primeiramente empregue por Newton para o quociente de duas quaisquer derivadas. Actualmente, significa sempre a derivação da posição em função do tempo e nunca em relação a uma outra qualquer variável. [25]

$$a = -\omega^2 r \cos \omega t - \frac{\omega^2 r^2 (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t)}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}} - \frac{\omega^2 r^4 \sin^2 \omega t \cos^2 \omega t}{(l^2 - r^2 \sin^2 \omega t)^{3/2}} \quad (8)$$

Uma vez que as derivadas das expressões (6) e (7) podem ser algo complexas e laboriosas - dependendo do grau de complexidade do mecanismo em estudo - pode efectuar-se uma simplificação matemática conducente a uma solução mais simples, perceptível e, ainda, com suficiente exactidão.

Nos mecanismos biela-manivela de uso corrente, o comprimento da biela (l) é cerca de 3 a 4 vezes superior ao da manivela (r), ou seja, $r/l = 1/4$, então, $r^2/l^2 = 1/16$ e, conseqüentemente, $(r^2 \sin^2 \omega t)/l^2 \leq 1/16$.

Da análise Matemática sabe-se que qualquer expressão do tipo $\sqrt{1-\varepsilon}$ pode ser desenvolvida numa série de potências do seguinte modo:

$$\sqrt{1-\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} - \dots, \text{ e para } \varepsilon = \frac{1}{16} \text{ o terceiro termo é igual a } 1/2048, \text{ pelo que este termo}$$

e os seguintes podem ser desprezados, sendo usualmente aceitável o erro cometido com esta simplificação.

Posto isto, a expressão do deslocamento (6) do pistão poderá ser substituída por:

$$x = r \cos \omega t + l - \frac{r^2 \sin^2 \omega t}{2l} \quad (9)$$

O primeiro termo desta expressão é AD, o segundo é BC e o terceiro é aproximadamente a diferença entre BC e BD (Cf. figura 11).

De modo análogo ao procedimento anterior, podem obter-se as expressões da velocidade e aceleração diferenciando, sucessivamente, a equação (9), sendo estas derivadas bastante mais simples de obter do que pela derivação da expressão (6).

Assim, vem que:

$$v = \dot{x} = -\omega \cdot r \left(\sin \omega t + \frac{r}{2l} \sin 2\omega t \right) \quad (10)$$

$$a = \dot{v} = -\omega^2 \cdot r \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right) \quad (11)$$

Note-se que $(-\omega r)$ e $(-\omega^2 r)$ representam, respectivamente, a velocidade tangencial e a aceleração centrífuga.

4.2.1.2. Método das Projecções das Velocidades

Um método simples e prático que permite determinar velocidades de corpos rígidos em movimento plano é o que se baseia no teorema das projecções das velocidades segundo o qual, *são iguais as projecções das velocidades de dois quaisquer pontos de um corpo rígido sobre a recta por eles definida*. [48,54]

No mecanismo biela-manivela, representado na figura 12, a manivela AB de comprimento r roda com uma velocidade angular (ω) constante. A biela BC tem comprimento l . As posições angulares da manivela e da biela são, respectivamente, (θ) e (φ). Ainda, na mesma figura 12, estão representados os vectores das velocidades dos pontos B e C, bem como o ângulo (α) formado pela direcção da biela e a direcção da velocidade de B.

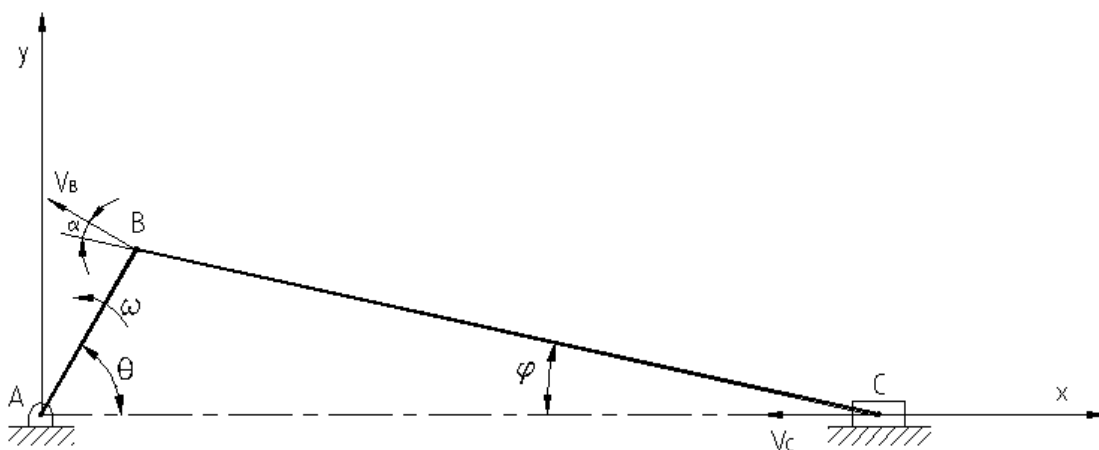


Fig.12 – Mecanismo biela-manivela em que estão representados os vectores das velocidades dos pontos B e C.

Da figura 12 pode observar-se que o ponto B tem uma velocidade cujo módulo é $v_B = \omega r$ e a direcção é perpendicular ao segmento AB, e o ponto C tem velocidade cujo suporte é o segmento de recta AC.

Assim, de acordo com o teorema das projecções das velocidades, e atendendo à geometria da figura 12, pode escrever-se a seguinte relação: $v_B \cdot \cos \alpha = v_C \cdot \cos \varphi$.

Ainda de acordo com a figura 12 pode observar-se que $\alpha = 90^\circ - (\theta + \varphi)$, então (v_C) virá igual a:

$$v_C = v_B \frac{\cos[90^\circ - (\theta + \varphi)]}{\cos \varphi}$$

Tendo em consideração as relações trigonométricas básicas¹³, a expressão de (v_C) toma a seguinte forma:

$$v_C = \omega \cdot r (\sin \theta + \cos \theta \tan \varphi) \quad (12)$$

Deve, agora, eliminar-se a variável (φ) da expressão (12), pelo que atendendo à lei dos senos vem que:

$$\sin \varphi = \frac{r}{l} \sin \theta$$

e sabendo que

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}$$

após tratamento matemático, e substituindo o valor de (θ) – uma vez que $\theta = \omega t$, a expressão da velocidade do pistão fica com o seguinte aspecto:

$$v_C = \omega \cdot r \cdot \sin \omega t + \frac{\omega \cdot r^2 \cdot \cos \omega t \cdot \sin \omega t}{\sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \omega t}} \quad (13)$$

Esta é, portanto, a expressão que permite conhecer, em cada instante, a velocidade linear do pistão (ponto C) em função das dimensões da manivela e da biela, da velocidade angular da manivela e do tempo.

Note-se que a equação (13) é exactamente igual à equação (7) apresentada na secção 4.2.1.1., pelo que as expressões obtidas, quer por integração (a posição), quer por derivação (a aceleração), terão de ser também iguais às expressões (6) e (8), respectivamente, pelo que os valores obtidos pelo método das projecções das velocidades são também iguais aos obtidos pelo método algébrico.

¹³ Note-se que $\cos(90-\alpha) = \sin \alpha$ e que $\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

4.2.1.3. Método Vectorial da Notação Complexa

Este método consiste na substituição de cada ligação do mecanismo por um vector, adicionando-os depois ao longo de um circuito fechado. A equação ou equações daí resultantes são, então, escritas em notação complexa. O estudo é, portanto, feito no espaço complexo. Na figura 13, o vector representa um número complexo, designado por Z , que pode ser expresso como $Z=X + Yi$, onde X e Y representam, respectivamente, a parte real e a parte imaginária. A quantidade (i) é a unidade imaginária tal que $(i^2 = -1)$.

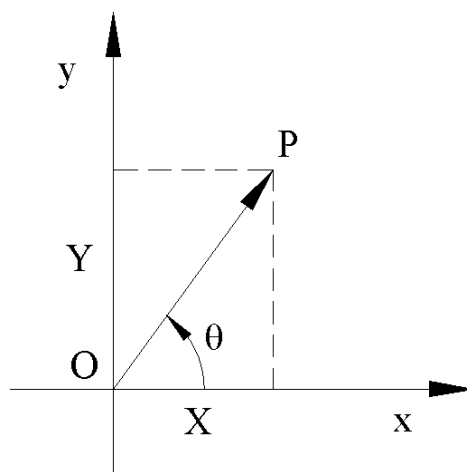


Fig.13 – Espaço complexo.

O valor absoluto ou magnitude do vector Z é $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Pode, agora, reescrever-se o vector Z da seguinte forma: $Z=r\cos\theta + i\text{sen}\theta = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$.

Das seguintes séries de MacLaurin [42,47]

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \dots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$i\text{sen}\theta = i\theta - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \dots$$

observa-se que a primeira série é a soma das segunda e terceira séries.

Aplicando, agora, este método ao mecanismo biela-maniela da figura 11, obtêm-se as expressões que permitem calcular a posição, a velocidade e a aceleração do pistão.

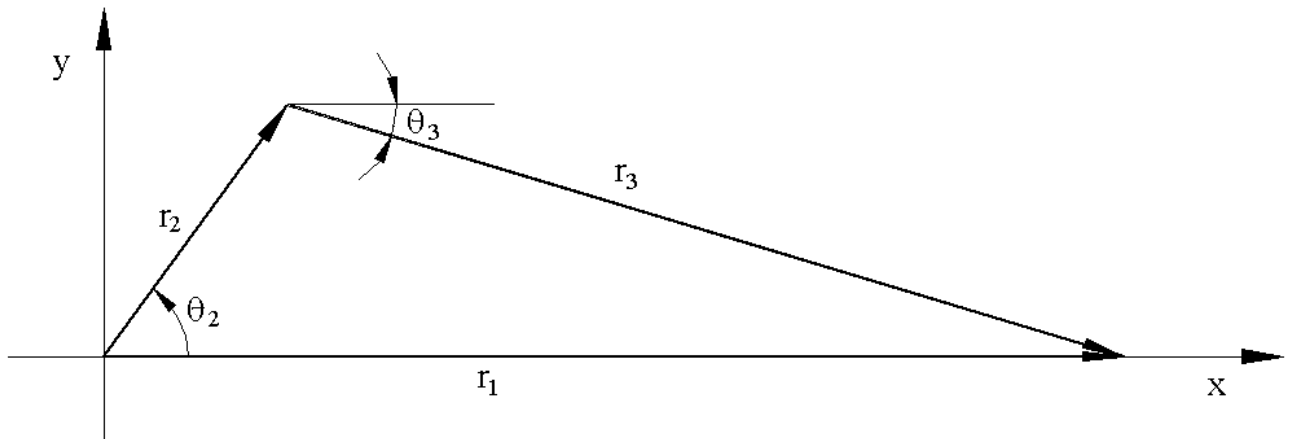


Fig.14 – Representação vetorial do mecanismo biela-manivela.

Substituindo cada ligação pelo vector posição, como mostra a figura 14, e somando em circuito fechado, obtém-se a seguinte equação vectorial:

$$\vec{r}_2 + \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = 0 \quad (14)$$

Em notação complexa pode escrever-se:

$$r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} - r_1 e^{i\theta_1} = 0 \quad (15)$$

em que r_2 , r_3 , θ_2 e θ_3 são valores conhecidos.

Pelas séries de MacLaurin pode escrever-se:

$$r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) + r_3(\cos \theta_3 + i \operatorname{sen} \theta_3) - r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) = 0 \quad (16)$$

separando as partes real e imaginária tem-se, respectivamente,

$$\begin{cases} r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 - r_1 \cos \theta_1 = 0 \\ r_2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_3 \operatorname{sen} \theta_3 - r_1 \operatorname{sen} \theta_1 = 0 \end{cases}$$

Como $(\cos \theta_1 = 1)$ e $(\operatorname{sen} \theta_1 = 0)$, resolvendo o sistema em ordem a (r_1) e (θ_3) obtém-se:

$$\theta_3 = \arcsen\left(-\frac{r_2 \operatorname{sen} \theta_2}{r_3}\right) \quad (17)$$

$$r_1 = r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos\left[\arcsen\left(-\frac{r_2 \operatorname{sen} \theta_2}{r_3}\right)\right] \quad (18)$$

Derivando a equação (15) em ordem ao tempo, obtém-se a expressão da velocidade do pistão:

$$\frac{dr_2}{dt} e^{i\theta_2} + r_2 i \frac{d\theta_2}{dt} e^{i\theta_2} + \frac{dr_3}{dt} e^{i\theta_3} + r_3 i \frac{d\theta_3}{dt} e^{i\theta_3} - \frac{dr_1}{dt} e^{i\theta_1} - r_1 i \frac{d\theta_1}{dt} e^{i\theta_1} = 0$$

Como r_2 , r_3 e θ_1 são constantes, as respectivas derivadas são nulas, e como $\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2$,

$\frac{d\theta_3}{dt} = \omega_3$ e $\frac{dr_1}{dt} = v_1$ a expressão de cima toma a seguinte forma:

$$ir_2\omega_2 e^{i\theta_2} + ir_3\omega_3 e^{i\theta_3} - v_1 e^{i\theta_1} = 0 \quad (19)$$

Novamente, pelas séries de MacLaurin obtém-se:

$$ir_2\omega_2(\cos\theta_2 + isen\theta_2) + ir_3\omega_3(\cos\theta_3 + isen\theta_3) - v_1(\cos\theta_1 + isen\theta_1) = 0.$$

As incógnitas desta equação são (v_1) e (ω_3), e onde ($\theta_1=0$).

Separando as partes real e imaginária, e resolvendo o sistema obtém-se:

$$\omega_3 = -\frac{r_2\omega_2 \cos\theta_2}{r_3 \cos\theta_3} \quad (20)$$

$$v_1 = -r_2\omega_2(\sen\theta_2 - \cos\theta_2 \tg\theta_3) \quad (21)$$

Para se obter a expressão da aceleração basta derivar a equação da velocidade em ordem ao tempo. Assim, derivando a expressão (19) vem que:

$$ir_2\left(\frac{d\omega_2}{dt} e^{i\theta_2} + \omega_2 i \frac{d\theta_2}{dt} e^{i\theta_2}\right) + ir_3\left(\frac{d\omega_3}{dt} e^{i\theta_3} + \omega_3 i \frac{d\theta_3}{dt} e^{i\theta_3}\right) - \left(\frac{dv_1}{dt} e^{i\theta_1} + v_1 i \frac{d\theta_1}{dt} e^{i\theta_1}\right) = 0$$

em que $\frac{d\omega_2}{dt} = \alpha_2 = 0$ porque $\omega_2 = \text{cte}$, $\frac{d\omega_3}{dt} = \alpha_3$, $\frac{dv_1}{dt} = a_1$ e $\frac{d\theta_1}{dt} = 0$.

Reescrevendo a equação anterior resulta:

$$i^2 r_2 \omega_2^2 e^{i\theta_2} + ir_3 \alpha_3 e^{i\theta_3} + i^2 r_3 \omega_3^2 e^{i\theta_3} - a_1 e^{i\theta_1} = 0$$

As incógnitas desta equação são (α_3) e (a_1).

Recorrendo de novo às séries de MacLaurin obtém-se:

$$i^2 r_2 \omega_2^2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) + i r_3 \alpha_3 (\cos \theta_3 + i \operatorname{sen} \theta_3) + i^2 r_3 \omega_3^2 (\cos \theta_3 + i \operatorname{sen} \theta_3) - a_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) = 0$$

Separando as partes real e imaginária e resolvendo o sistema vem:

$$\alpha_3 = \frac{r_2 \omega_2^2 \operatorname{sen} \theta_2 + r_3 \omega_3^2 \operatorname{sen} \theta_3}{r_3 \cos \theta_3} \quad (22)$$

$$a_1 = -r_2 \omega_2^2 (\cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{tg} \theta_3) - r_3 \omega_3^2 (\cos \theta_3 + \operatorname{sen} \theta_3 \operatorname{tg} \theta_3) \quad (23)$$

em que (α_3) é a aceleração angular da biela e (a_1) é a aceleração linear do pistão.

Deste modo, as equações (18), (21) e (23) permitem calcular a posição, a velocidade e a aceleração do pistão do mecanismo biela-manivela.

4.2.1.4. Método Vectorial da Notação Matricial

Neste método, tal como no método da notação complexa, cada um dos elementos que constitui o mecanismo é substituído por um vector de modo a obter-se um polígono fechado. À semelhança dos anteriores, o objectivo deste parágrafo é o de determinar as expressões que traduzam a posição, a velocidade e a aceleração do pistão do mecanismo biela-manivela.

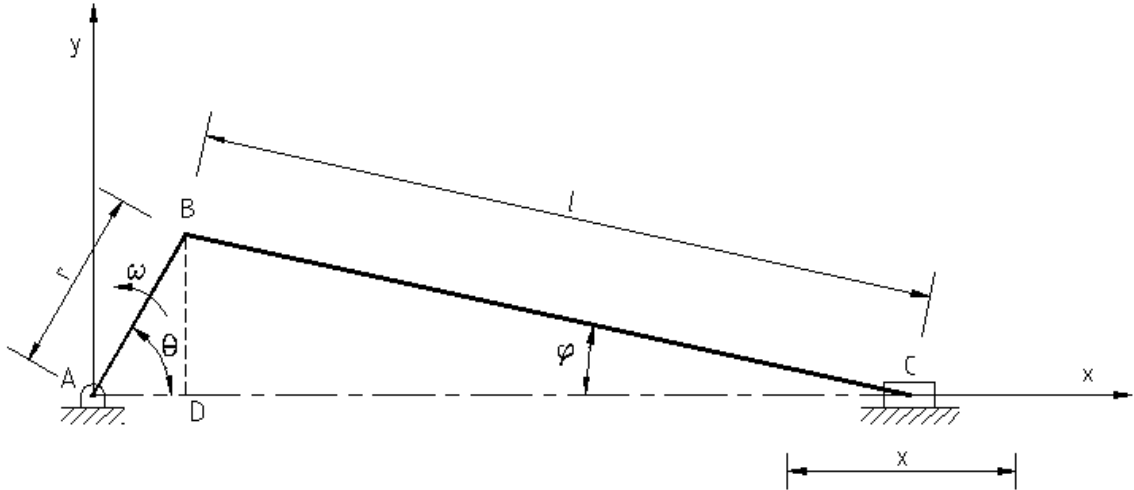


Fig.15 – Mecanismo biela-manivela.

Assim, projectando cada um dos vectores nas direcções (xx) e (yy) obtém-se:

$$xx : r \cdot \cos \theta + l \cdot \cos \varphi - x_c = 0 \quad (24)$$

$$yy : r \cdot \sin \theta - l \sin \varphi = 0 \quad (25)$$

Resolvendo a equação (25) em ordem a (φ) , substituindo em (24), e resolvendo esta em relação a (x_c) , obtém-se, respectivamente:

$$\varphi = \arcsen\left(\frac{r}{l} \sin \theta\right) \quad (26)$$

$$x_c = r \cdot \cos \theta + l \cdot \cos \left[\arcsen\left(\frac{r}{l} \sin \theta\right) \right] \quad (27)$$

A expressão (27) permite determinar a posição do pistão em função das características dimensionais do mecanismo biela-manivela.

Derivando as equações (24) e (25) vem que:

$$-r \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta - l \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi - \dot{x}_c = 0 \quad (28)$$

$$r \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta - l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi = 0 \quad (29)$$

onde $\dot{x}_C = v_C$; $\dot{\theta} = \omega_2$ e $\dot{\varphi} = \omega_3$.

Neste sistema as incógnitas são (v_C) e (ω_3).

Reescrevendo as equações de cima na forma matricial vem que:

$$\begin{bmatrix} -\sin \varphi & -1 \\ -\cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \cdot \omega_3 \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \omega_2 \cdot \sin \theta \\ -r \cdot \omega_2 \cdot \cos \theta \end{bmatrix}$$

Aplicando a regra de Cramer¹⁴ à matriz obtém-se:

$$\omega_3 = -\omega_2 \frac{r \cdot \cos \theta}{l \cdot \cos \varphi} \quad (30)$$

$$v_C = \frac{r \cdot \omega_2 \cdot \sin(\varphi + \theta)}{\cos \varphi} \quad (31)$$

Derivando, agora, as equações (28) e (29) obtém-se, respectivamente:

$$-r \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta - r \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta - l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin \varphi - l \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi - \ddot{x}_C = 0 \quad (32)$$

$$r \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos \theta - r \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta - l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi + l \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi = 0 \quad (33)$$

onde $\ddot{x}_C = a_C$; $\ddot{\varphi} = \alpha_3$ e $\ddot{\theta} = \alpha_2 = 0$ porque se admite que a manivela roda com velocidade constante.

As incógnitas do sistema são (α_3) e (a_C).

Reescrevendo as equações (32) e (33) vem que:

$$-r \cdot \omega_2^2 \cdot \cos \theta - l \cdot \alpha_3 \cdot \sin \varphi - l \cdot \omega_3^2 \cdot \cos \varphi - a_C = 0$$

$$-r \cdot \omega_2^2 \cdot \sin \theta - l \cdot \alpha_3 \cdot \cos \varphi + l \cdot \omega_3^2 \cdot \sin \varphi = 0$$

Escrevendo o sistema na forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} -\sin \varphi & -1 \\ -\cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \cdot \alpha_3 \\ a_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \omega_2^2 \cdot \cos \theta + l \cdot \omega_3^2 \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \omega_2^2 \cdot \sin \theta - l \cdot \omega_3^2 \cdot \sin \varphi \end{bmatrix}$$

¹⁴ Para matrizes com menos de 4 equações é conveniente utilizar a regra de Cramer. Para matrizes maiores, esta regra torna-se lenta na resolução de sistemas, pelo que se deve usar outro método, por exemplo, o método de eliminação de Gauss. [10]

Aplicando novamente a regra de Cramer obtém-se:

$$\alpha_3 = \frac{r \cdot \omega_2^2 \cdot \sin \theta - l \cdot \omega_3^2 \cdot \sin \varphi}{-\cos \varphi} \quad (34)$$

$$a_c = \frac{l \cdot \omega_3^2 + r \cdot \omega_2^2 \cdot \cos(\theta + \varphi)}{-\cos \varphi} \quad (35)$$

em que (α_3) é a aceleração angular da biela e (a_c) é a aceleração linear do pistão

As expressões (27), (31) e (35) permitem calcular, respectivamente, a posição, a velocidade e a aceleração do pistão do mecanismo biela-manivela.

4.2.1.5. Método da Decomposição do Movimento

Nesta secção estuda-se a cinemática dos corpos rígidos, isto é, estabelecem-se as relações que existem entre o tempo, a posição, a velocidade e a aceleração dos vários pontos materiais que formam um corpo rígido¹⁵.

Um corpo rígido pode descrever três tipos de movimento: movimento de translação, movimento de rotação e movimento geral ou misto. O movimento é de translação quando todos os pontos descrevem trajectórias paralelas de tal modo que as linhas que unem dois quaisquer pontos do corpo permanecem sempre paralelas às posições iniciais (Cf. figura 16). O movimento é de rotação em torno de um eixo quando todos os pontos descrevem trajectórias circulares em torno de uma recta designada eixo de rotação (Cf. figura 17). O movimento designa-se misto ou geral, quando co-existem os movimentos de translação e de rotação.

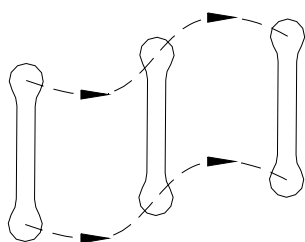


Fig.16 – Movimento plano de translação.

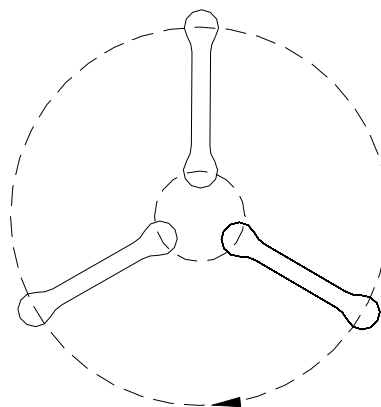


Fig.17 – Movimento plano de rotação.

O movimento plano geral de um corpo pode sempre ser considerado como a combinação dos movimentos de translação e de rotação – lei de Chasles.

Um exemplo do movimento plano geral é ilustrado na figura 18, que consiste numa barra cujos extremos se deslocam, respectivamente, ao longo de uma guia horizontal e outra vertical. Este movimento (movimento misto) pode ser substituído pela soma de uma translação na direcção horizontal e de uma rotação em torno de A (figura 18) ou pela soma de uma translação com o ponto B na direcção vertical e de uma rotação em torno do mesmo ponto B.

¹⁵ Um corpo é considerado rígido se as distâncias entre todas as suas partículas permanecem constantes quando sujeito a uma acção exterior. Um corpo rígido conserva, portanto, a sua forma e a sua dimensão durante o movimento.

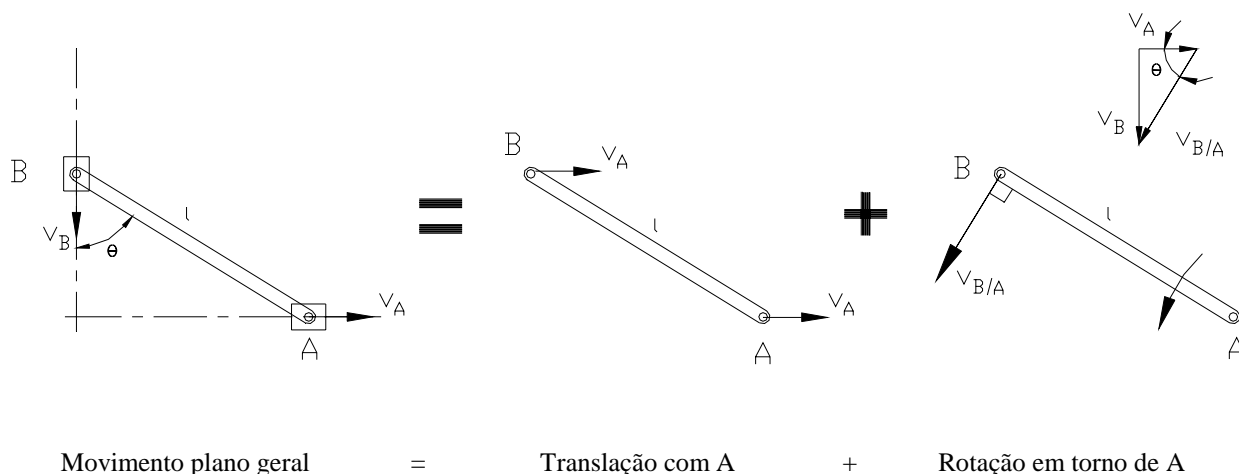


Fig.18 – Movimento plano geral da barra AB e polígono de velocidades.

Atendendo ao conceito de velocidade relativa, a velocidade absoluta (v_B) do ponto B é dada pela soma vectorial:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \quad (36)$$

A velocidade (v_A) corresponde à translação da barra com A, enquanto a velocidade relativa ($v_{B/A}$) está associada à rotação da barra em torno de A e é medida em relação a um sistema de eixos com origem em A. Designando ($r_{B/A}$) o vector posição de B em relação a A e (ω) a velocidade angular da barra, vem que:

$$v_{B/A} = \omega \times r_{B/A} \quad (37)$$

substituindo a equação (37) em (36) vem:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega \cdot \vec{r}_{B/A} \quad (38)$$

A maior parte dos mecanismos que se pode encontrar constam não de um, mas sim de vários elementos em movimento. Quando tais elementos se encontram articulados o estudo pode ser feito em cada um deles separadamente, sem, contudo, esquecer que os pontos comuns a várias ligações devem ter a mesma velocidade absoluta, quer se considere pertencentes a uma ou outra ligação.

Aplique-se, agora este método ao mecanismo biela-manivela da figura 19 de modo a obter-se a velocidade e a aceleração do pistão.

Para o mecanismo representado na figura 19 sabe-se que a velocidade (v_C) do pistão é horizontal, enquanto que a velocidade do ponto B é perpendicular à manivela.

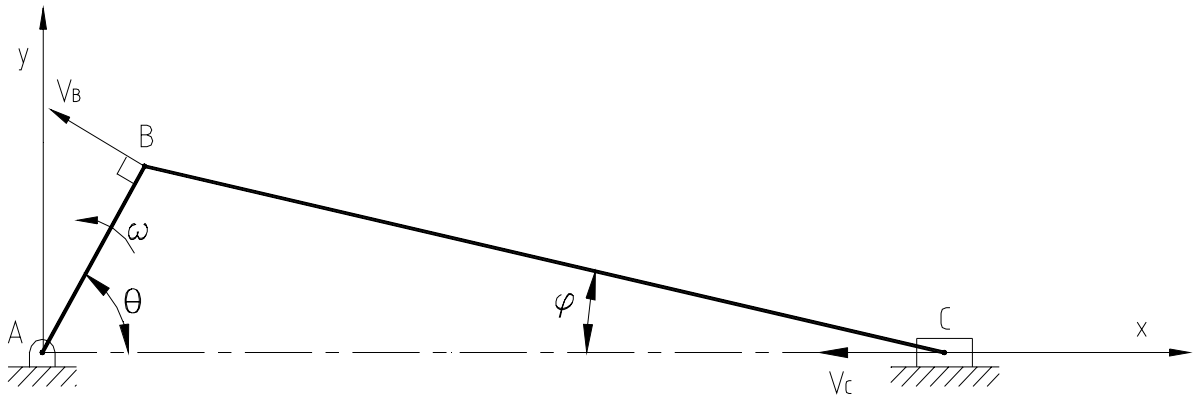


Fig.19 – Mecanismo biela-manivela.

De acordo com o que foi apresentado anteriormente pode estudar-se isoladamente cada um dos movimentos dos corpos que compõem o mecanismo. Assim,

Movimento da manivela – movimento plano de rotação

A manivela AB roda em torno do ponto A, pelo que a velocidade do ponto B é dada por:

$$V_B = \omega_{AB} \times r.$$

Atendendo à geometria da figura 19 e à lei dos senos, pode calcular-se o ângulo que a biela faz com a horizontal (ϕ):

$$\phi = \arcsen\left(\frac{r}{l} \sin \theta\right)$$

Movimento da biela – movimento plano geral

Uma vez que a biela descreve um movimento plano geral deve decompor-se este movimento numa translação com o ponto B e numa rotação em torno do mesmo ponto B (Cf. figura 20).

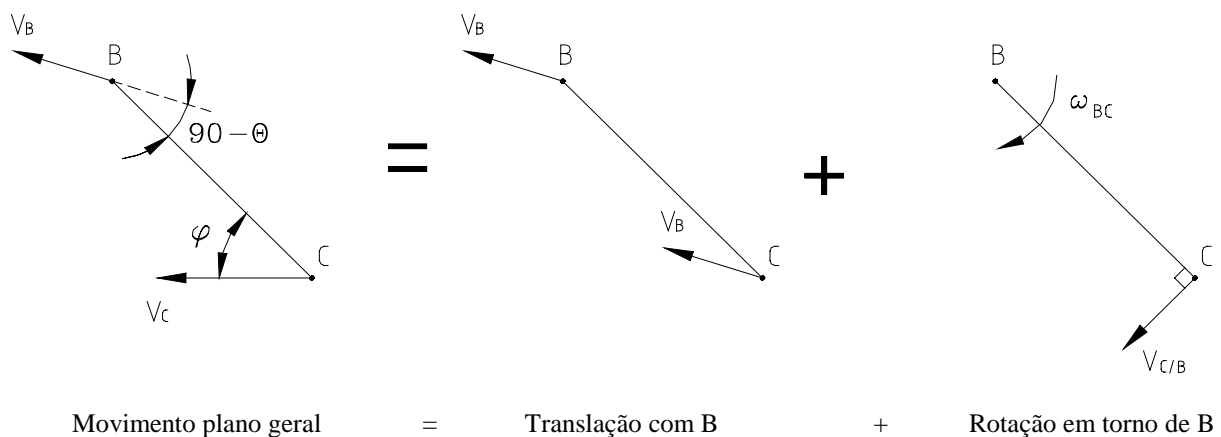


Fig.20 – Movimento plano geral da biela.

A velocidade (v_C) é dada pela seguinte equação vectorial:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B}$$

em que $v_{C/B} = \omega_{BC} \times l$.

Projectando, agora, cada um dos vectores segundo as direcções (xx) e (yy), obtém-se um sistema de duas equações a duas incógnitas (ω_{BC} e v_C), ou seja:

$$xx: -v_C = -v_B \cdot \sin \theta - \omega_{BC} \cdot l \cdot \sin \varphi$$

$$yy: 0 = v_B \cdot \cos \theta - \omega_{BC} \cdot l \cdot \cos \varphi$$

Resolvendo o sistema, vem que:

$$\omega_{BC} = \frac{v_B \cdot \cos \theta}{l \cdot \cos \varphi}$$

$$v_C = v_B \cdot \sin \theta + \omega_{BC} \cdot l \cdot \sin \varphi \quad (39)$$

Antes de calcular a aceleração do pistão faz-se uma breve referência a conceitos relativos à aceleração. Assim, na figura 21a mostra-se a ligação 2 de um mecanismo, dotada de velocidade e aceleração angulares, respectivamente (ω_{AB}) e (α_{AB}), tal como indicadas. Neste caso, as componentes da aceleração do ponto B são:

$$a_B^t = r \cdot \alpha_{AB}$$

$$a_B^n = r \cdot \omega_{AB}^2$$

cujas direcções são, respectivamente, a direcção de (ω) e a de BA, salientando-se que neste caso (a_A)=0.

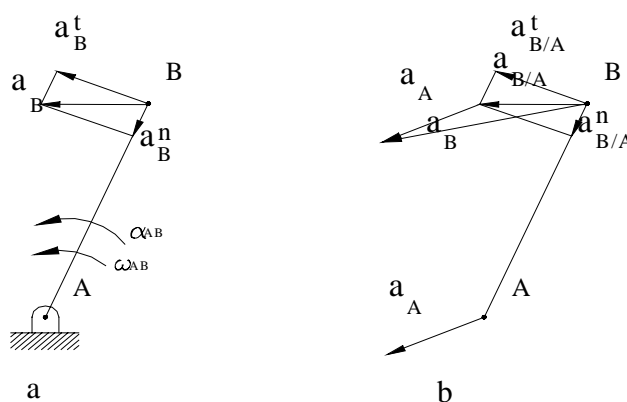


Fig.21 – Componentes da aceleração de um corpo em rotação.

No caso mais genérico em que o ponto A também tem uma dada aceleração, tal como se ilustra na figura 21b, e sendo A o centro de curvatura do movimento de B, então, verifica-se a relação:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}^n + \vec{a}_{B/A}^t$$

De seguida, calcula-se a aceleração do pistão (ponto C) utilizando o método da decomposição do movimento de cada um dos corpos que compõem o mecanismo biela-manivela. Assim,

Movimento da manivela – movimento plano de rotação

Uma vez que se admitiu que a manivela roda com velocidade constante, a aceleração tangencial em B é nula, sendo a componente normal igual a $(\omega_{AB}^2 \times r)$, e ilustrada na figura 22.

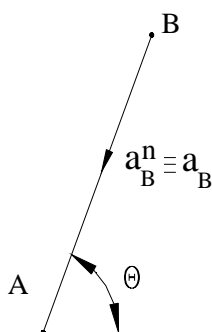
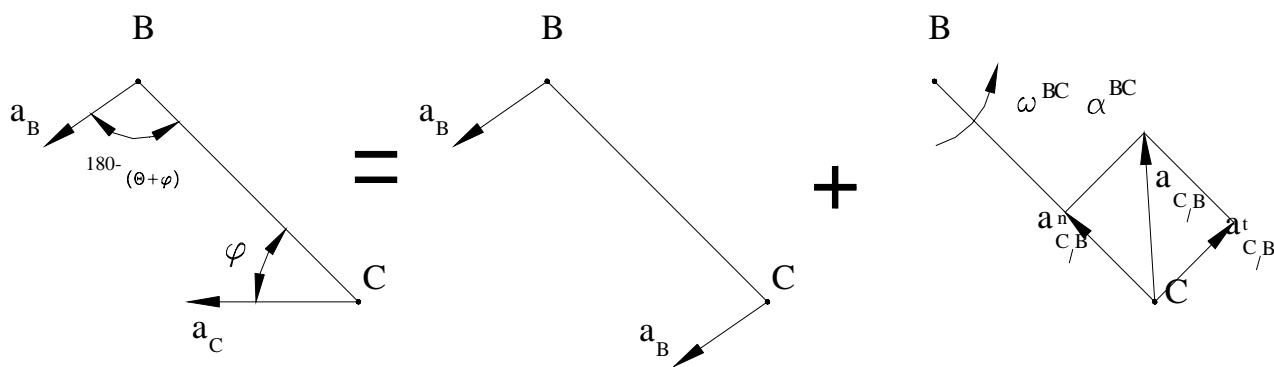


Fig.22 – Componentes da aceleração do ponto B da manivela, $a_B^t = 0$ e $a_B^n = \omega_{AB}^2 \times r$.

Movimento da biela – movimento plano geral

Dado que a biela tem movimento plano geral, este deve decompôr-se numa translação com o ponto B e numa rotação em torno de B, como mostra a figura 23.



Movimento plano geral = Translação com B + Rotação em torno de B

Fig.23 – Decomposição do movimento (aceleração) da biela.

Atendendo a que $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{C/B}$ e projectando esta equação nas direcções (xx) e (yy), obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} xx: -a_C &= -a_B \cdot \cos \theta - \omega_{BC}^2 \cdot l \cdot \cos \varphi + \alpha_{BC} \cdot l \cdot \sin \varphi \\ yy: 0 &= -a_B \cdot \sin \theta + \omega_{BC}^2 \cdot l \cdot \sin \varphi + \alpha_{BC} \cdot l \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

Resolvendo em ordem a (α_{BC}) e (a_C) vem que:

$$\begin{aligned} \alpha_{BC} &= \frac{a_B \cdot \sin \theta - \omega_{BC}^2 \cdot l \cdot \sin \varphi}{l \cdot \cos \varphi} \\ a_C &= a_B \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta}{l \cdot \sin \varphi} \right) + \omega_{BC}^2 \cdot l (\cos \varphi + \sin \varphi \cdot \tan \varphi) \end{aligned} \quad (40)$$

As expressões (39) e (40) permitem calcular, respectivamente a velocidade e a aceleração do pistão do mecanismo biela-manivela em análise.

4.2.2. Métodos Gráficos

4.2.2.1. Método do Polígono de Velocidades / Acelerações

O método gráfico do polígono de velocidades/acelerações baseia-se na resolução gráfica de equações vectoriais.

Considere-se o mecanismo biela-manivela representado na figura 24, onde se admite que a manivela roda com velocidade constante e se pretende determinar a velocidade e aceleração do pistão, utilizando o método gráfico do polígono de velocidades e acelerações, respectivamente.

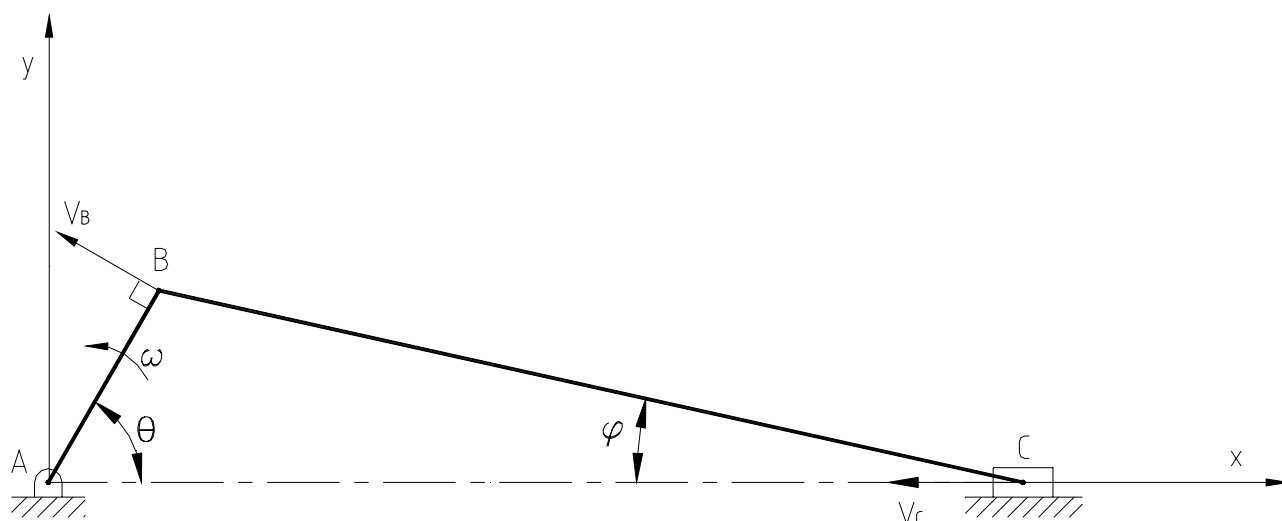


Fig.24 – Mecanismo biela-manivela.

Pela definição de velocidade relativa sabe-se que:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B}$$

onde se conhece o módulo e a direcção de v_B ($v_B = \omega_{AB} \cdot AB$, perpendicular ao segmento AB). Sabe-se, ainda, que $(v_{C/B})$ é perpendicular ao segmento BC.

Deste modo, é possível traçar, a uma escala adequada, o polígono de velocidades. Tomando, então, uma escala e a partir da escolha de um ponto O_v , designado origem de velocidades, traça-se o segmento $v_B = \omega_{AB} \cdot AB$, cuja direcção é perpendicular ao segmento AB e sentido correspondente à rotação da manivela.

Respeitando, na sua colocação relativamente a (v_B) , as regras da adição e subtracção de vectores, e seguindo a equação de velocidades relativas, é possível completar graficamente o polígono de velocidades.

A figura 25 ilustra o resultado final do polígono de velocidades, onde, para além da velocidade do pistão (v_C), também se obtém o valor da velocidade relativa ($v_{C/B}$), medindo directamente sobre o desenho e afectadas pelo factor de escala.

Saliente-se que todas as direcções AB, BC e AC são conhecidas.

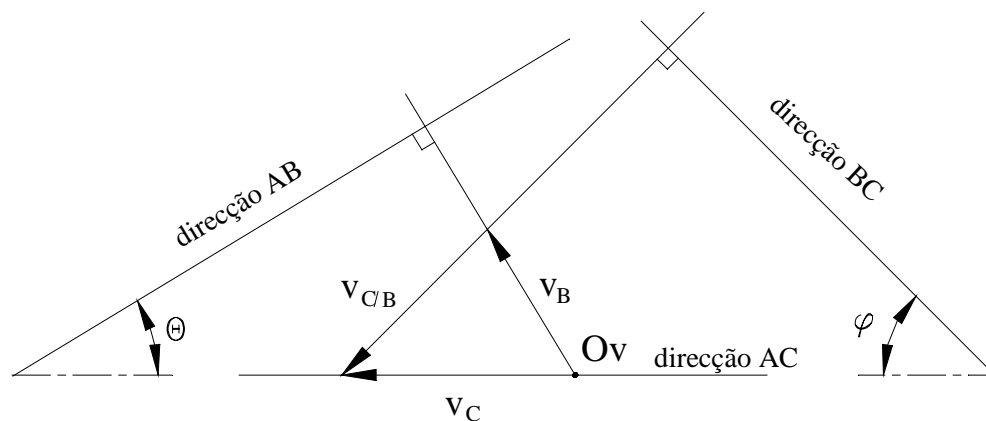


Fig.25 – Construção gráfica do polígono de velocidades.

Analogamente ao polígono de velocidades, o polígono de acelerações baseia-se na resolução gráfica da equação vectorial da aceleração relativa, entre dois pontos (B e C) do mesmo corpo rígido e na decomposição das acelerações nas suas direcções tangencial (a^t) e normal (a^n).

De seguida, apresenta-se a construção gráfica do polígono de acelerações do mecanismo biela-manivela com vista à determinação da aceleração do pistão.

A equação da aceleração relativa do ponto C é dada por:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{C/B}$$

substituindo as suas componentes normais e tangenciais, vem que:

$$\vec{a}_C^n + \vec{a}_C^t = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^t + \vec{a}_{C/B}^n + \vec{a}_{C/B}^t$$

em que:

$$\vec{a}_C^n = 0 \text{ porque a trajectória do pistão é rectilínea, ou seja, } \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{\infty} = 0$$

$$\vec{a}_B^t = \alpha_{AB} \cdot AB = 0 \text{ porque } \omega_2 = \text{constante}$$

$$\vec{a}_B^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \frac{v_B^2}{AB}$$

$$\vec{a}_{C/B}^t = \alpha_{BC} \cdot BC$$

$$\vec{a}_{C/B}^n = \omega_{BC}^2 \cdot BC = \frac{v_C^2}{BC}$$

Assim, e adoptando uma escala adequada, é possível construir graficamente o polígono de acelerações, ilustrado na figura 26.

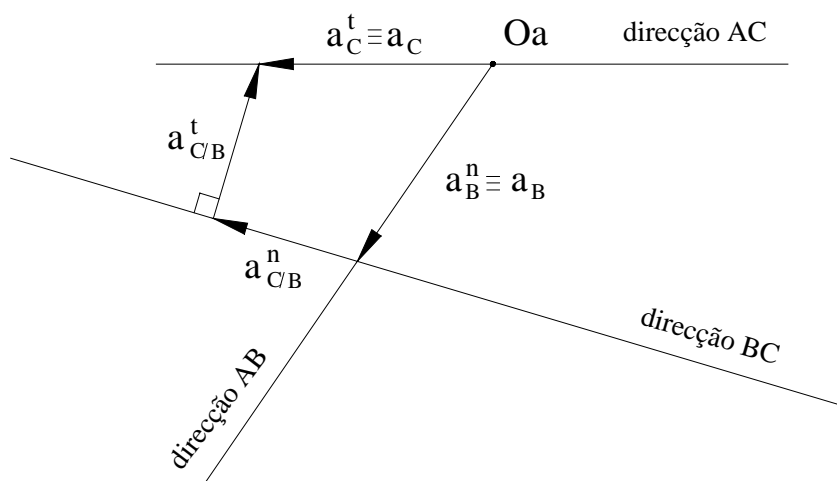


Fig.26 – Construção gráfica do polígono de acelerações.

Medindo directamente sobre os polígonos de velocidades e acelerações, e afectando o factor de escala, é possível saber o valor da velocidade e da aceleração do pistão do mecanismo biela-manivela.

4.2.2.2. Método dos Centros Instantâneos de Rotação

Utilizando os centros instantâneos de rotação é possível efectuar a análise de velocidades, uma vez que, por definição de centro instantâneo de rotação, conhecida a velocidade do extremo de uma ligação relativamente ao seu CIR, então, essa velocidade será exactamente a mesma para a extremidade da outra ligação cujo CIR é comum.

Na figura 27 está representado o mecanismo biela-manivela, do qual se conhecem todos os seus centros instantâneos de rotação e a velocidade do centro O_{23} . Pretende-se, deste modo, determinar a velocidade linear do ponto O_{34} , isto é, a velocidade do pistão.

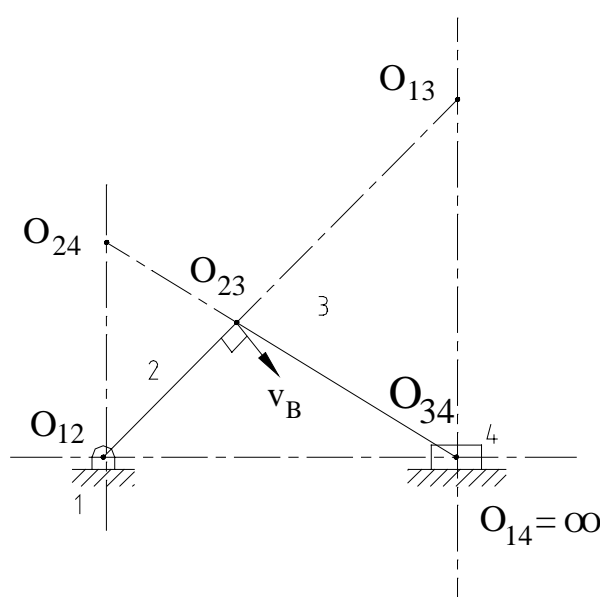


Fig.27 – Mecanismo biela-manivela e respectivos centros instantâneos de rotação.

Observando a figura 27 verifica-se que o centro O_{23} pertence à manivela (2) e o centro O_{34} pertence ao pistão. As ligações 2 e 4 têm em comum o centro O_{24} , que é o ponto comum a ambas as ligações e que, por isso, tem a mesma velocidade, quer se considere pertencente a uma ou outra ligação.

Sabe-se que todos os pontos situados sobre a ligação 2, ou a ela ligados, rodam em torno do eixo que passa pelo centro O_{12} . Pode, pois, escrever-se a seguinte relação:

$$v_{24} = v_{23} \frac{O_{12}O_{14}}{O_{12}O_{23}}$$

Observe-se que o centro O_{14} está situado no infinito sobre uma recta perpendicular à trajectória do pistão. Como a velocidade do centro O_{34} é a mesma que a do centro O_{24} , uma vez que ambos rodam em torno de um eixo situado no infinito (centro O_{14}), significa que (v_{24}) e (v_{34}) têm a

mesma amplitude, a mesma direcção e o mesmo sentido. Na figura 28 pode observar-se a construção gráfica da obtenção da velocidade do pistão, (v_{34}).

Há, contudo, um processo alternativo que permite obter a velocidade do pistão. Assim, designe-se por (r) o comprimento da manivela, (l) o comprimento da biela, (θ) a posição angular da manivela, (ϕ) a posição angular da biela, (ω_2) a velocidade angular da manivela e (ω_3) a velocidade angular da biela, e atendendo ao conceito de CIR, são válidas as seguintes relações:

$$v_{23} = \omega_2 \cdot r = \omega_3 \cdot O_{13}O_{23}$$

$$v_{34} = \omega_3 \cdot O_{13}O_{34}$$

Da primeira equação obtém-se ω_3 que, substituído na segunda, permite saber (v_{34}).

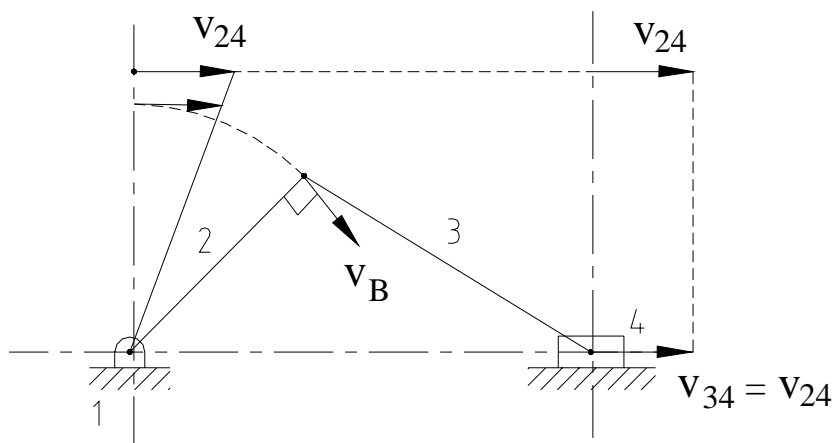


Fig.28 – Determinação gráfica da velocidade do pistão utilizando o conceito de CIR.

4.2.2.3. Método da Diferenciação Gráfica

O procedimento que se segue consiste na determinação da velocidade e aceleração para várias fases do mecanismo biela-manivela recorrendo ao método da diferenciação gráfica. Este método é particularmente útil quando o gráfico de deslocamentos é obtido por meios analógicos (registador x-t, osciloscópio, etc.), ou quando a expressão analítica é algo complexa. No entanto, apresenta como principal limitação o facto de apenas ser sensível a mudanças de magnitude da grandeza em estudo, seja de deslocamento linear ou angular, seja de velocidade ou aceleração.

O processo de diferenciação gráfica de uma função $x=f(t)$, ilustrado na figura 29, é o que de seguida se expõe.

Escolha-se, arbitrariamente, um ponto da curva, por exemplo, o ponto A e trace-se a tangente BC. Por definição de derivada sabe-se que

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Assim, a derivada do ponto A é aproximadamente igual a $\dot{x} = \frac{CD}{BD}$

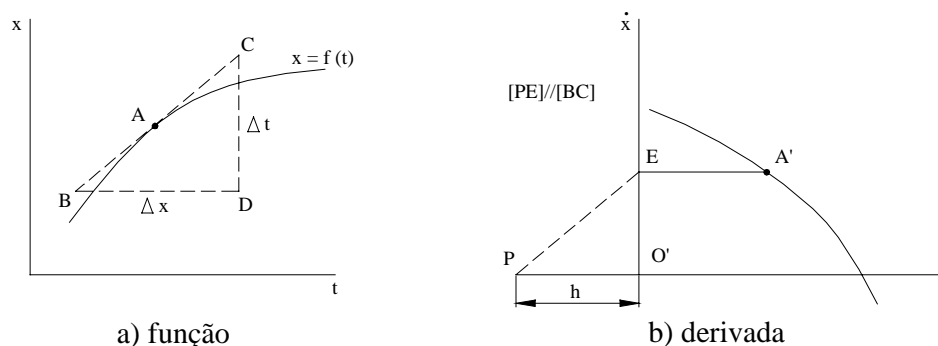


Fig.29 – Diferenciação gráfica de uma função.

O processo passa, pois, pela traçagem de tangentes a vários pontos da curva, construindo triângulos, preferencialmente de abcissas [BD] iguais. Seguidamente, torna-se possível construir um diagrama de derivadas, utilizando o mesmo eixo das abcissas (t) e, para cada ponto considerado, registando em ordenadas a altura [CD] do respectivo triângulo (Cf. figura 29b). A distância PO' é chamada distância polar e é representada por h, com unidades em segundos [s], para um gráfico de velocidades. O ponto A', medido a partir do eixo das abcissas, representa, portanto, a velocidade do ponto A.

A escala da derivada é determinada por $\dot{x} = \frac{x}{h}$

É conveniente que a escala de tempos nos dois gráficos seja a mesma. Repetindo o raciocínio, agora para a aceleração, obter-se-á o gráfico de acelerações.

A precisão do método será tanto maior quanto menor for o intervalo $[\Delta t]$ utilizado e pela precisão do traçado das tangentes.

Aplicando este método ao mecanismo biela-manivela, e com o auxílio do programa computacional AutoCAD, obtêm-se os resultados ilustrados na figura 30.

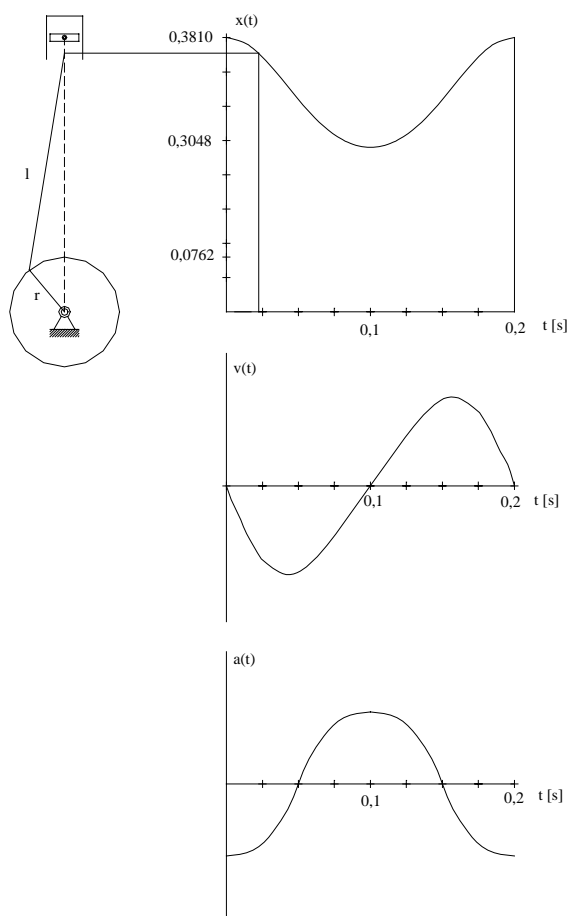


Fig.30 – Obtenção dos gráficos das velocidades e das acelerações utilizando o método da diferenciação gráfica.

4.2.3. Métodos Computacionais

4.2.3.1. Dynapak

O programa computacional Dynapak é constituído por um conjunto de programas - DynaDraw, DynaCode, DynaSolv e DynaView - com os quais é possível criar modelos bidimensionais de mecanismos – através de construções gráficas esquemáticas, complementadas com tabelas de características, incluindo vários tipos de pares cinemáticos, a possibilidade de introdução de massas, momentos mássicos de inércia, coeficientes de atrito, amortecimento e restituição, além de geradores de movimento lineares e angulares.

Adicionalmente, o programa Dynapak aceita um considerável número de características especiais (*e.g.* temporização e encadeamento de actuações) através de sub-rotinas programáveis em linguagem FORTRAN.

Após a análise do mecanismo (cinemática, dinâmica), os resultados são fornecidos, sob a forma de *frames* de animação no ecrã, para o movimento global, e em gráficos (*versus* tempo) dos vários parâmetros calculados, sejam as coordenadas, as velocidades, as acelerações, as forças, etc. actuates em pontos específicos do mecanismo e definidos pelo utilizador.

Como características não desprezáveis em termos de utilização posterior dos resultados, é de referir que todos os dados de saída são gravados em ficheiros do tipo texto, passíveis de funcionar como entrada noutros programas.

De seguida, descrevem-se, sumariamente, os principais passos a percorrer na análise do mecanismo biela-manivela.

Assim, o primeiro passo consiste na definição geométrica do mecanismo, em que se desenham os vários elementos/ligações que o constituem. Nesta fase estabelece-se também o tipo de par cinemático a utilizar em cada conexão. Inicialmente define-se a origem de cada ligação, à qual é automaticamente colocado um sistema de eixos, cuja origem representa o centro de gravidade da ligação. A origem pode, posteriormente, ser reposicionada. Os restantes elementos geométricos que definem e completam cada ligação são posicionados relativamente ao sistema de eixos local. A cada par cinemático é atribuído um código formado por dois dígitos (Cf. figura 31). Assim, por exemplo, à ligação 1 está associado o sistema de eixos x_1y_1 , o par cinemático rotóide 12 e o par cinemático translacional/deslizante 14, como ilustra a figura 31.

O primeiro elemento (corpo 1) é, por sistema do programa Dynapak, o fixe do mecanismo, enquanto que a manivela, a biela e o pistão do mecanismo em análise são, respectivamente, os corpos 2, 3 e 4.

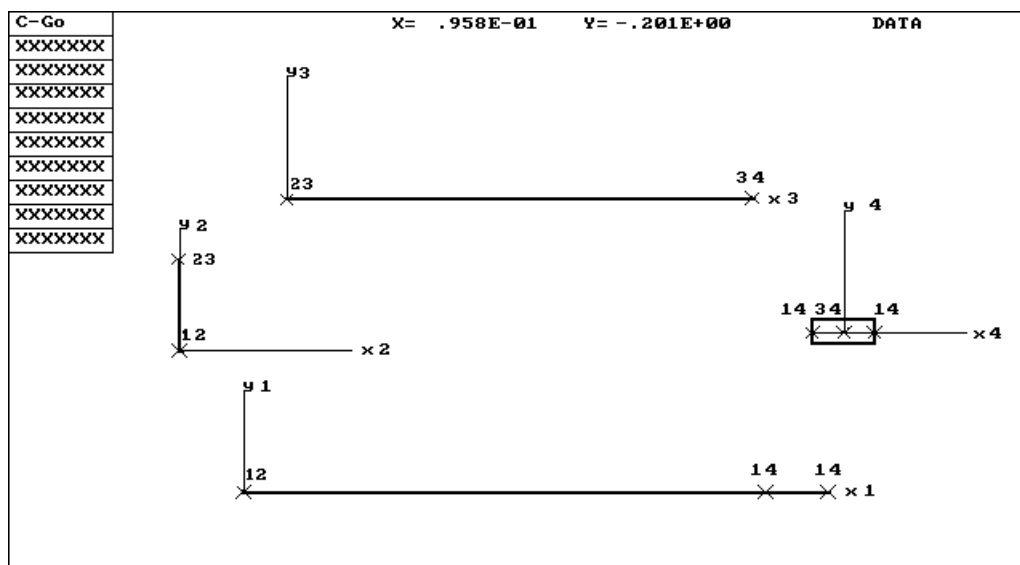


Fig. 31 – Construção gráfica dos elementos que constituem o mecanismo biela-manivela e respectivos pares cinemáticos, no programa DynaDraw.

Uma vez desenhados todos os componentes do mecanismo, estes devem, agora, ser unidos de modo a obter-se o mecanismo em estudo. Esta operação efectua-se juntando os pares cinemáticos numa posição de funcionamento do mecanismo (Cf. figura 32).

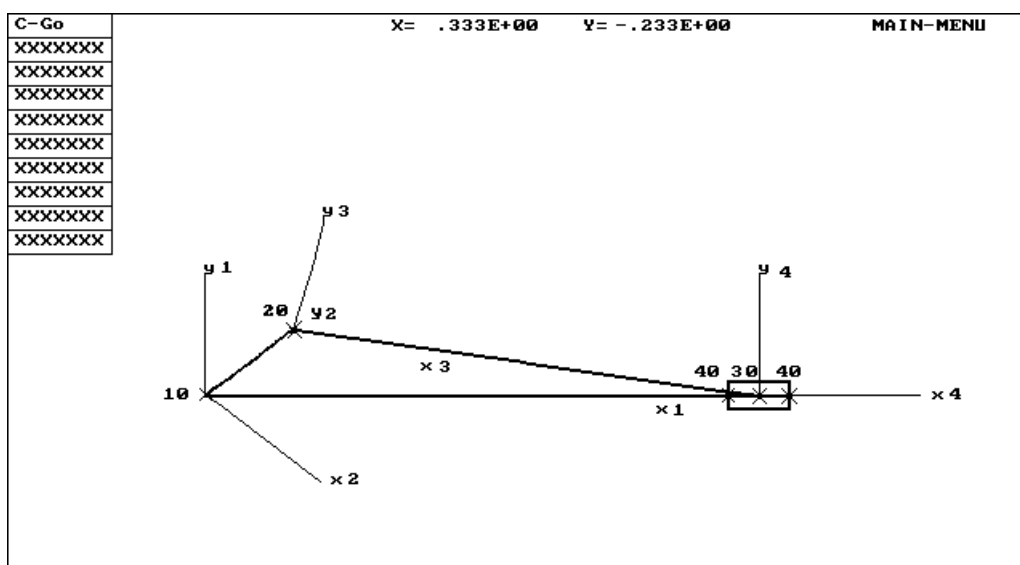


Fig. 32 – Mecanismo biela-manivela após a junção das suas ligações, no programa DynaDraw.

Após a junção das ligações, o programa computacional Dynapak calcula automaticamente o número de graus de liberdade do mecanismo e, conseqüentemente, o número de geradores de movimento necessário (Cf. figura 33).

```

Enter the DynaPak file name

figura

This system has the mobility  1

We need  1 generators to run a STATIC,
QUASI-STA, KINEMATIC AND KINETOSTATIC Analysis
Stiff springs can be used instead generators for STATIC
QUASI-STA AND KINETOSTATIC Analysis. Springs can
not be used instead generators for KINEMATIC analysis.

PUSH RETURN TO CONTINUE

```

Fig. 33 – Mobilidade do mecanismo biela-manivela e respectivo número de geradores de movimento.

No passo seguinte, devem definir-se as características do mecanismo tais como: as massas, os momentos mássicos de inércia, as forças exteriores aplicadas, os geradores de movimento, etc. (Cf. figura 34). É possível iniciar o estudo do mecanismo directamente neste passo, dispensando, deste modo, toda a construção gráfica, sendo, no entanto, aconselhável e de utilização mais simples, mormente para mecanismos mais complexos, a definição gráfica dos mesmos.

```

DynaCode 1.00 8/30/90 Copyright (c) 1990 AIS Inc.

Print/File      Edit      List      Quit

A - Title and Control Information
B - Masses and Mass Moments of Inertia
C - Approximate Global Coordinates
D - External Forces and Torques
E - Joint Descriptions
F - Spring Descriptions
G - Automatic Generators
H - Graphics Coordinates
I - Circle Definitions

Change parameters for automatic generators

```

Fig. 34 – Definição das propriedades do mecanismo biela-manivela, no programa DynaCode.

Uma vez definidas as características do mecanismo, pode, agora, proceder-se à sua análise cinemática onde se especificam as variáveis de saída¹⁶. No presente exemplo do mecanismo biela-manivela as variáveis de saída são: a posição angular da manivela (LIN 2 PHI), a posição linear do pistão (LIN 4 X), a velocidade linear do pistão (LIN 4 DX) e a aceleração linear do pistão (LIN 4 DDX). É possível, nesta fase, alterar os valores de alguns dos parâmetros do mecanismo.

```

4
ENTER CHOICE: SPR, LIN, JOI, GEN PAR OR Q
lin 2 phi lin 4 x 0,0 lin 4 dx 0,0 lin 4 ddx 0,0

      TIME      LIN 2,PHI  LIN 4,X    LIN 4,DX    LIN 4,DDX

      VELOCITIES AND DISPLACEMENTS
      DX      DY      DPH      X      Y      PHI
.0000E+00 .0000E+00 .3142E+02 .0000E+00 .0000E+00 -.1571E+01
.8951E-05 .2394E+01 -.7854E+01 .7620E-01 -.2849E-06 .9348E-06
.1119E-04 .0000E+00 .0000E+00 .3810E+00 .0000E+00 .0000E+00

      ACCELERATIONS
      AX      AY      ALPHA
.0000E+00 .0000E+00 .0000E+00
-.7521E+02 .2812E-03 -.8649E-03
-.9401E+02 .0000E+00 .0000E+00

      TIME      LIN 2,PHI  LIN 4,X    LIN 4,DX    LIN 4,DDX
.000000E+00 -.157E+01 .381E+00 .112E-04 -.940E+02

<HIT ENTER TO CONTINUE>

```

Fig. 35 – Cálculo da posição angular da manivela, bem como da posição, da velocidade e da aceleração lineares do pistão, no programa DynaSolv.

Efectuada a análise cinemática, os resultados são ilustrados no ecrã, sendo, posterior e automaticamente, criado um ficheiro de texto que os guarda (Cf. tabela I), onde primeira coluna diz sempre respeito ao tempo, enquanto que a segunda e restantes representam as variáveis de saída previamente definidas.

¹⁶ No programa Dynapak o significado das variáveis de saída é o que se sintetiza no quadro seguinte:

Simbologia	Designação
LIN	<i>Link</i> - Ligação/elemento
GEN	<i>Generator</i> - Gerador de movimento
PHI	Posição angular de uma ligação
X	Posição linear de um ponto de uma ligação
DX	Velocidade linear de um ponto de uma ligação
DDX	Aceleração linear de um ponto de uma ligação
TRQ	Torque/binário motor de um gerador de movimento angular

4				
LIN	2PHI	PHI - posição angular da manivela (corpo 2)		
LIN	4X	X - posição do pistão (corpo 4)		
LIN	4DX	DX - velocidade do pistão (corpo 4)		
LIN	4DDX	DDX - aceleração do pistão (corpo 4)		
.203030E-04	-.157016E+01	.381000E+00	-.142741E-02	-.940078E+02
.303030E-04	-.156985E+01	.381000E+00	-.236749E-02	-.940078E+02
.103030E-02	-.153843E+01	.380950E+00	-.970702E-01	-.950495E+02
.203030E-02	-.150702E+01	.380806E+00	-.190713E+00	-.931128E+02
.303030E-02	-.147560E+01	.380569E+00	-.284299E+00	-.935583E+02
.403030E-02	-.144418E+01	.380238E+00	-.377448E+00	-.929294E+02
.140303E-01	-.113003E+01	.371978E+00	-.127041E+01	-.784806E+02
.240303E-01	-.815867E+00	.355792E+00	-.197206E+01	-.540416E+02
.340303E-01	-.501708E+00	.334034E+00	-.237589E+01	-.219429E+02

Tabela I – Ficheiro de texto onde são guardados os resultados obtidos após análise cinemática.

Realizada a análise do mecanismo, é possível visualizar os resultados em termos de animação e simulação do movimento global do mesmo como ilustra a figura 36, fases (a) a (f).

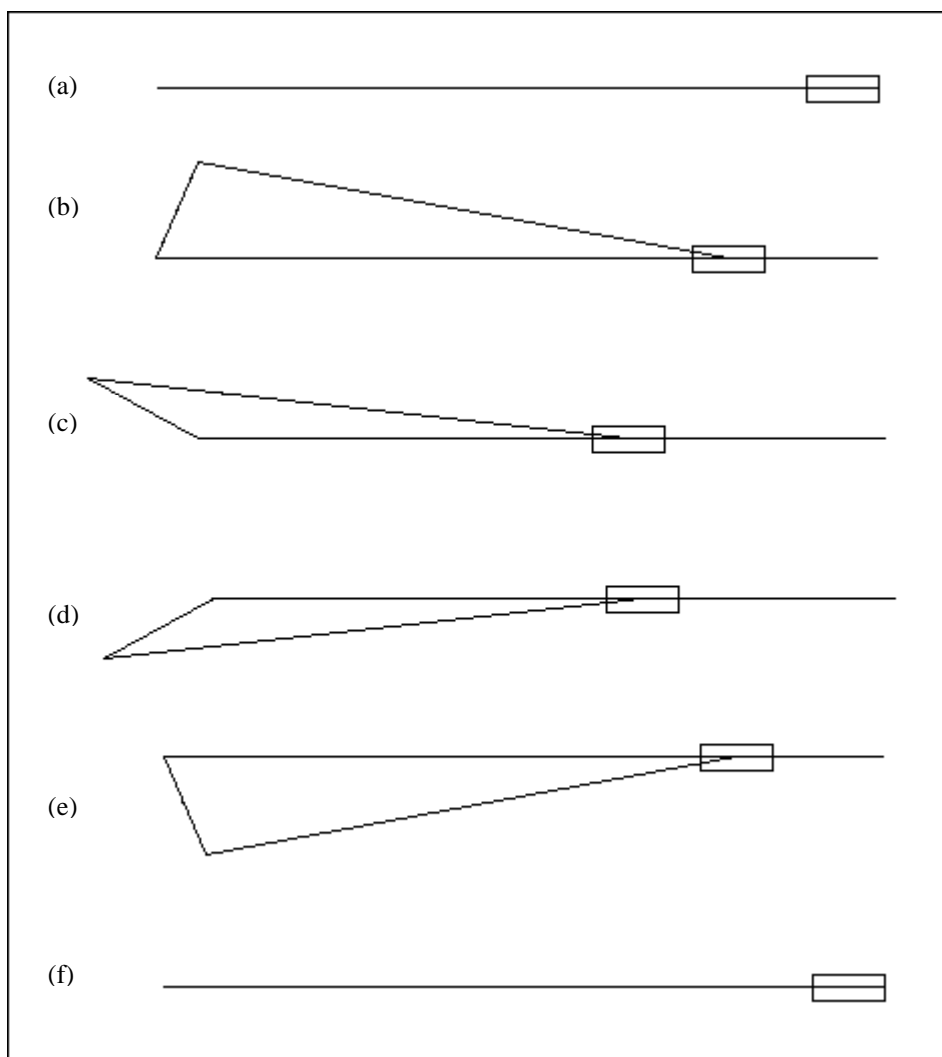


Fig.36 – Visualização do mecanismo biela-manivela. Na presente situação evidenciam-se 6 fases particulares do movimento global do mecanismo, no programa DynaView.

4.2.3.2. Working Model

O programa computacional Working Model é uma ferramenta informática de auxílio no estudo (cinemático-dinâmico) de sistemas mecânicos (máquinas, mecanismos, etc.).

Neste programa computacional é possível a construção geométrica e rigorosa¹⁷ bi ou tridimensional do modelo em estudo. O Working Model é ainda compatível com vários programas computacionais vocacionados para o desenho assistido por computador (Mechanical Desktop, SolidEdge, SolidWorks, Pro/Engineer, AutoCAD).

Após a construção geométrica dos elementos que constituem o modelo, é possível complementá-lo com informação relativa ao tipo de par cinemático, geradores de movimento, massas, momentos mássicos de inércia, coeficientes de atrito, etc.

O programa Working Model permite ainda o encadeamento e temporização de actuações através de funções analíticas, de rotinas programáveis em GWBasic ou através do fornecimento de dados sob a forma de tabelas.

Os resultados são fornecidos sob a forma de *frames* de animação no ecrã e, simultaneamente, é possível visualizar, no ecrã, os dados de saída relativos aos parâmetros definidos pelo utilizador, sob a forma gráfica ou numérica.

À semelhança do programa Dynapak, os resultados são guardados em ficheiro de texto, podendo estes funcionar como entrada noutros programas. Adicionalmente, pode ser criado um ficheiro no formato vídeo com a animação do mecanismo em análise.

De seguida, descrevem-se, resumidamente, os principais passos a realizar na análise do mecanismo biela-manivela¹⁸.

O primeiro passo consiste na definição geométrica do mecanismo onde se desenharam os vários elementos que o constituem (Cf. figura 37). A cada elemento é automaticamente associado um sistema de eixos local, situado no seu centro geométrico, e é relativamente a este que se localizam os pares cinemáticos.

¹⁷ Após a definição do mecanismo, o programa Working Model cria automaticamente o seu esquema cinemático.

¹⁸ No presente exemplo utilizou-se o programa computacional Working Model 2D versão de demonstração, razão pela qual não se apresentam os dados de saída na forma de ficheiro.

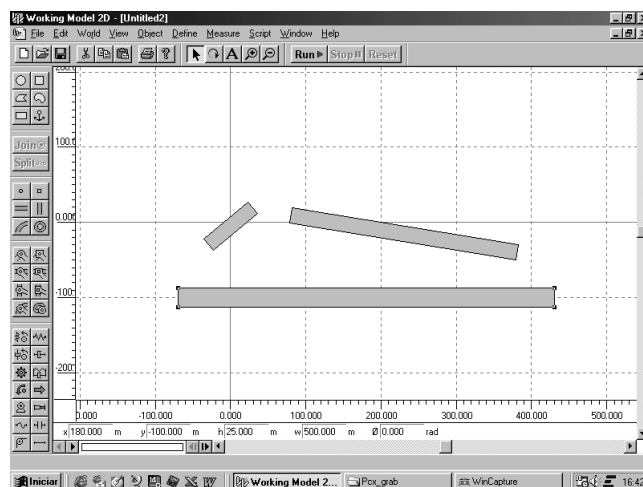


Fig.37 – Configuração geométrica dos elementos que constituem o mecanismo biela-manivela, no programa WorkingModel 2D.

Uma vez desenhados os componentes do mecanismo, pode, agora, definir-se o fixe¹⁹, o tipo de par cinemático e o gerador de movimento (Cf. figura 38). É possível, em qualquer momento, visualizar e alterar todas as características do mecanismo.

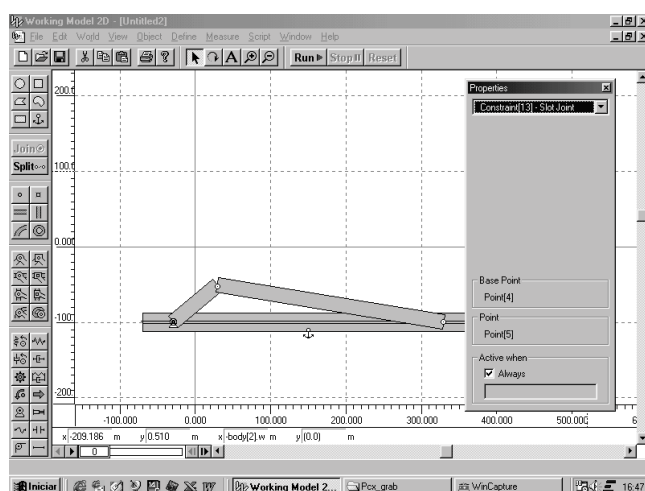
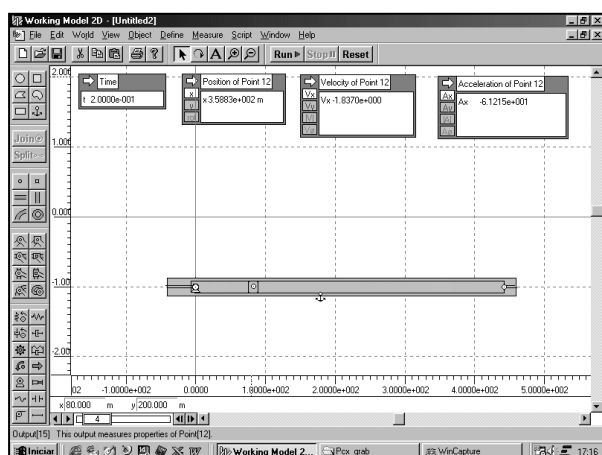


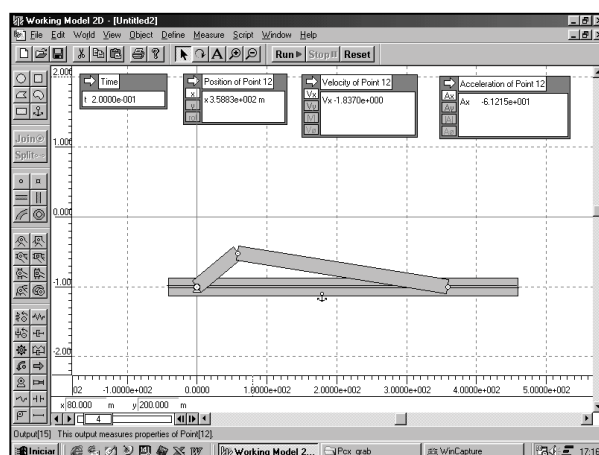
Fig.38 – Definição das características cinemáticas do mecanismo no programa WorkingModel 2D.

A partir deste momento é possível simular o movimento do mecanismo e efectuar a sua análise cinemática, nomeadamente, o cálculo da posição, da velocidade e da aceleração do pistão (Cf. figura 39).

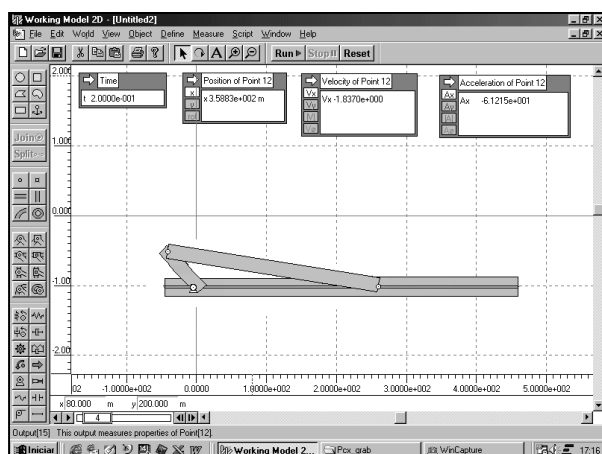
¹⁹ Ao contrário do programa Dynapak, no WorkingModel é possível definir o fixe do mecanismo em qualquer elemento e em qualquer instante.



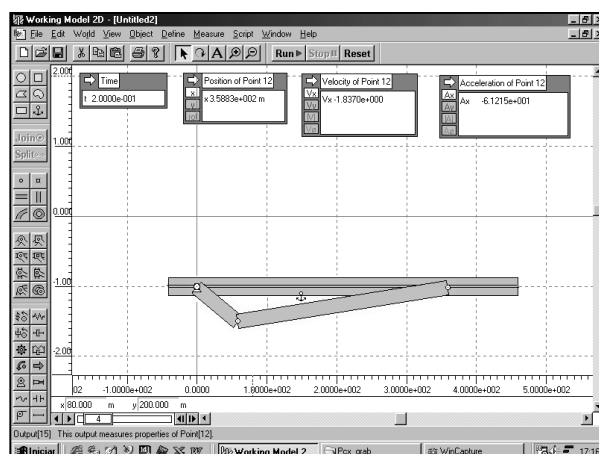
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig.39 – Visualização do mecanismo biela-manivela. Na presente situação evidenciam-se 4 fases particulares do movimento global do mecanismo, no programa Working Model 2D.

4.3. Análise Dinâmica

4.3.1. Considerações Prévias

Para que os órgãos que constituem os sistemas mecânicos não sejam nem sobdimensionados, nem sobredimensionados, é imprescindível o conhecimento, de uma forma tão exacta quanto possível, da distribuição dos esforços a que cada componente está sujeito, para, deste modo, se proceder a um correcto dimensionamento, tendo em vista projectos mais cuidados a nível de economia, de segurança, de competitividade, de fiabilidade, etc.

O elevado número de esforços que podem estar envolvidos nas máquinas e nos mecanismos dificulta a sua análise exaustiva, pelo que se torna importante identificar as suas componentes dominantes e secundárias e, dentro destas últimas, as que podem ser desprezadas sem que, com isso, fique significativamente prejudicado o rigor dessa análise.

Com efeito, vários são os factores que concorrem para os esforços globais presentes nos sistemas mecânicos dos quais se destacam:

- esforços devido ao efeito da gravidade;
- esforços aplicados;
- esforços de inércia;
- esforços de atrito/fricção;
- esforços de impacto;
- esforços devido à variação da temperatura;
- esforços devido à deformação dos corpos;
- etc.

Todavia, geralmente apenas as três primeiras causas são relevantes para o cálculo dos esforços envolvidos nos sistemas mecânicos de comum aplicação. As restantes terão um papel preponderante somente em situações específicas. Por isso, é prática corrente efectuar algumas simplificações conducentes a cálculos mais simples, mais económicos e com exactidão ainda aceitável. Porém, só a experiência do projectista, aliada a um correcto conhecimento da situação em estudo, dita tais simplificações.

Uma primeira simplificação que, em geral, se faz é a de considerar os corpos como sendo rígidos. Na realidade, todos os corpos se deformam, em maior ou menor grau, devido à sua elasticidade. Contudo, os esforços originados por tais deformações são pequenos quando comparados com os restantes, motivo pelo qual os esforços devido às deformações se podem desprezar e, conseqüentemente, considerar os corpos rígidos.

Uma segunda simplificação, que é frequentemente feita, é a de desprezar o efeito do atrito das ligações dos vários elementos que compõem os sistemas mecânicos. O efeito do atrito depende de vários factores, tais como: tipo de apoio, tipo de lubrificação, cargas, condições de funcionamento, etc. Contudo, para boas condições de lubrificação, os efeitos de atrito são relativamente pequenos e, por isso, desprezam-se.

Quando os esforços causados pelo efeito da gravidade são pequenos comparados com os demais, os primeiros podem desprezar-se, sendo pequeno o erro cometido com esta simplificação.

Todos os elementos que constituem os mecanismos têm massa, que associada ao movimento (aceleração) geram forças, ditas de inércia. Quando a intensidade destas forças é pequena relativamente às cargas aplicadas, podem desprezar-se os efeitos inerciais. Nestas circunstâncias, está-se perante uma análise estática. Quando no estudo se incluem os efeitos de inércia, a análise designa-se de análise dinâmica. Tal análise deve aplicar-se sempre que os efeitos inerciais são da mesma ordem de grandeza das cargas aplicadas.

Os métodos analíticos que auxiliam no cálculo dos esforços envolvidos nos sistemas mecânicos têm duas bases distintas, a saber:

- condições de equilíbrio estático e dinâmico;
- princípio da conservação da energia – princípio dos trabalhos virtuais.

4.3.2. Métodos Analíticos

4.3.2.1. Análise Estática – Diagrama do corpo livre

Antes de iniciar o estudo dinâmico do mecanismo biela-manivela, é oportuno fazer a sua análise estática. Para tal, considere-se o mecanismo biela-manivela ilustrado na figura 40, o qual se admite que funciona a baixas velocidades de rotação, pelo que se podem desprezar os efeitos de inércia.

Admite-se também que os esforços devido ao efeito da gravidade são pequenos quando comparados com os demais esforços envolvidos, pelo que as forças originadas pelo efeito da gravidade se desprezam. Despreza-se, ainda, o atrito entre as superfícies com movimento relativo.

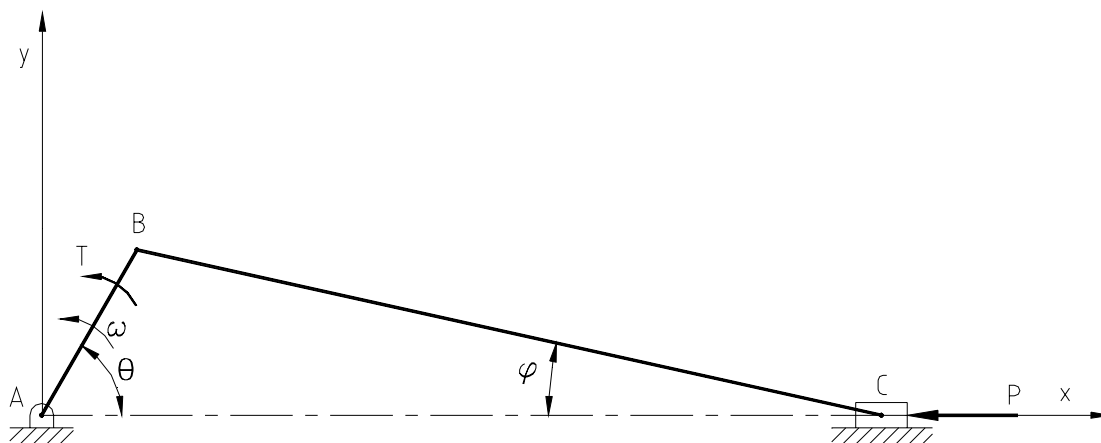


Fig.40 – Mecanismo biela-manivela.

Sabendo que na fase representada na figura 40, a força que actua no pistão é P, pretende-se determinar – aplicando a análise estática – o momento (T) necessário para manter o sistema em equilíbrio estático.

A análise estática baseia-se na construção do diagrama do corpo livre de cada elemento que constitui o mecanismo. A primeira etapa passa, pois, pela sua identificação e pela respectiva representação do diagrama do corpo livre.

A cada diagrama é, então, aplicado o princípio do equilíbrio estático, isto é, um corpo ou sistema de corpos rígidos que esteja em equilíbrio estático, tem que verificar-se a simultaneidade de duas condições: *ser nula não só a soma vectorial de todas as forças que actuam sobre o corpo, mas também, a soma de todos os momentos das forças em torno de um determinado eixo*. Estas condições traduzem-se matematicamente por:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{T} = 0$$

A figura 41 ilustra os diagramas do corpo livre de cada um dos elementos do mecanismo biela-manivela.

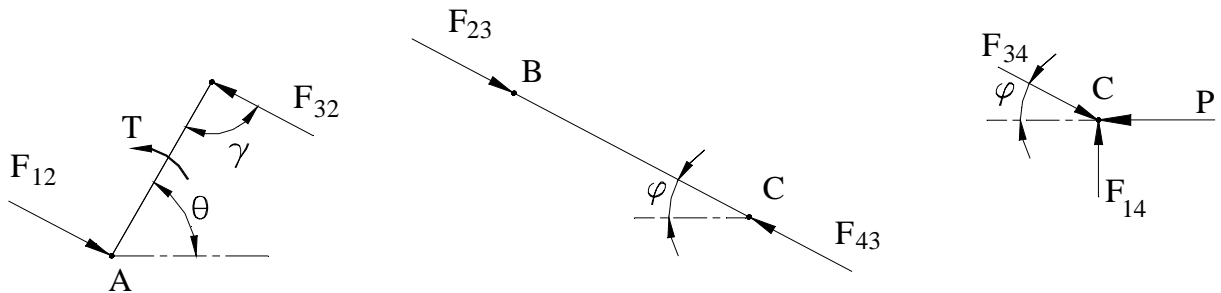


Fig.41 – Diagramas do corpo livre de cada um dos elementos que constituem o mecanismo biela-manivela.

Somando na direcção (xx) as forças que actuam no pistão, obtém-se:

$$F_{34} = \frac{P}{\cos \varphi}$$

e atendendo ao diagrama do corpo livre da biela vem que:

$$F_{32} = -\frac{P}{\cos \varphi}$$

Somando os momentos que actuam na manivela em torno do ponto A, resulta:

$$T = -F_{32} \cdot r \cdot \sin \gamma$$

Atendendo à geometria da figura 41, vem que $\gamma = 180^\circ - (\theta + \varphi)$, substituindo na expressão anterior, após tratamento matemático, obtém-se:

$$T = -P \cdot r \cdot \left(\sin \theta + \frac{r \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{\sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \theta}} \right) \quad (41)$$

Esta é a expressão que traduz o momento necessário para manter o mecanismo em equilíbrio estático. Ela anula-se para $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 180^\circ$ correspondentes aos dois pontos mortos.

Através da análise estática é ainda possível determinar os esforços exercidos em cada um dos pinos.

4.3.2.2. Análise Estática / Dinâmica – Método dos trabalhos virtuais

O método dos trabalhos virtuais²⁰ baseia-se no princípio da conservação da energia. Este método é deveras importante, pois permite conhecer as condições de equilíbrio de um qualquer sistema mecânico, onde os métodos da estática geométrica obrigam ao estudo de cada corpo do sistema.

Tal como o nome indica, o método dos trabalhos virtuais deriva do conceito de trabalho. O trabalho de uma força (F), correspondente um deslocamento (dr), é definido como a quantidade $dW=F \cdot dr$, obtido pelo produto escalar da força (F) pelo deslocamento (dr). Designando, respectivamente, (F) e (ds) o módulo da força e do deslocamento, sendo (α) o ângulo formado por (F) e (dr), e recordando a definição de produto escalar de dois vectores, pode escrever-se: $dW=F \cdot ds \cdot \cos\alpha$. Analogamente, para o movimento de rotação, tem-se que $dW=T \cdot d\theta$.

Considere-se o mecanismo biela-manivela, representado na figura 42, onde o momento (T) exercido na manivela equilibra a força (P) que actua no pistão.

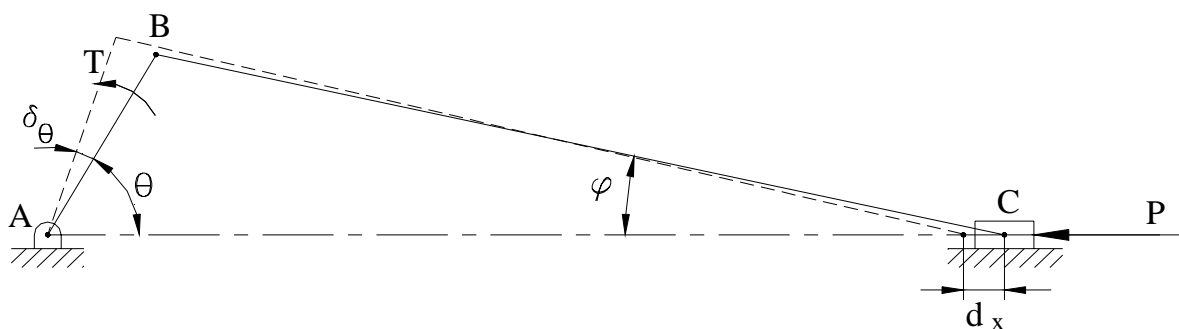


Fig.42 – Mecanismo biela-manivela e respectivos deslocamentos virtuais.

Pretende determinar-se o trabalho realizado quando a manivela tem um deslocamento angular ($\delta\theta$), a que corresponde um deslocamento linear (δx) no pistão.

As forças que actuam no pino A não realizam trabalho porque não há deslocamento. Desprezando o atrito entre o pistão e o cilindro, a força que este exerce sobre o pistão é

²⁰ Este método já é conhecido há mais de dois séculos tendo, então, a designação de princípio das *velocidades virtuais*. Nada há de estranho nesta designação se se atender a que, na época, as palavras movimento, força e velocidade eram empregues indistintamente. Por volta de 1850, o significado de cada um dos vocábulos foi-se aproximando do significado actual, com excepção da expressão *velocidade virtual*, que significava pequeno deslocamento. O trabalho realizado por uma força designava-se de *momento virtual* dessa força, ou seja, o produto da intensidade da força pela *velocidade virtual*. No início do presente século, as expressões *velocidade virtual* e *momento virtual* foram substituídas por deslocamento virtual e trabalho virtual, respectivamente. Desde então, e até aos nossos dias, este princípio é conhecido por Método dos Deslocamentos Virtuais ou Método dos Trabalhos Virtuais. [25,54]

perpendicular ao deslocamento do pistão, pelo que esta força também não realiza trabalho. Em cada ligação há forças de módulo igual e sentido contrário, daí que o somatório dos trabalhos realizados pelas forças de ligação é nulo. Portanto, apenas há trabalho realizado pela força (P) e pelo momento (T) e cuja tradução matemática é:

$$W = T \cdot \delta\theta + P \delta x \quad (42)$$

Considera-se que, para deslocamentos pequenos, o valor de (T) e (P) são constantes. Caso haja uma variação significativa durante o deslocamento elementar, o trabalho deve ser obtido por integração.

De facto, os deslocamentos considerados são hipotéticos, ditos deslocamentos virtuais, pois, caso fossem finitos, o sistema tomaria uma nova configuração alterando as suas condições de equilíbrio.

Deslocamento virtual de um sistema é, portanto, qualquer deslocamento infinitamente pequeno dos corpos que o formam. Ao número de possíveis deslocamentos virtuais independentes de um sistema chama-se mobilidade ou graus de liberdade do sistema.

O trabalho realizado durante um deslocamento virtual designa-se de trabalho virtual. O princípio dos trabalhos virtuais²¹ estabelece que: *é nulo o trabalho realizado durante um deslocamento virtual desde a posição de equilíbrio.*

Atendendo ao princípio dos trabalhos virtuais, da expressão (42) obtém-se:

$$T \cdot \delta\theta = -P \cdot \delta x \text{ e, como } \delta\theta = \omega \cdot dt \text{ e } \delta x = v_c \cdot dt \text{ vem que:}$$

$$T = -P \cdot \frac{v_c}{\omega}$$

Assim, pode-se concluir que (T) e (P) estão relacionados pelo quociente entre a velocidade linear do pistão e a velocidade angular da manivela. Substituindo esta relação, obtida na análise cinemática, obtém-se a seguinte expressão para o momento (T):

$$T = -P \cdot r \cdot \left(\sin \theta + \frac{r \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta}{\sqrt{l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \theta}} \right) \quad (43)$$

²¹ Este princípio foi enunciado sob uma forma quase idêntica à actual por John Bernoulli; porém sem demonstração. Sob a forma geral, o princípio foi enunciado e demonstrado, pela primeira vez, por Lagrange. A extensão do princípio ao caso de haver ligações não permanentes foi feita por Ostrogradski. [54]

Esta expressão é exactamente igual à obtida na secção anterior (análise estática), pelo que o resultado é também o mesmo.

O método dos trabalhos virtuais é aplicável, quer em situações estáticas, quer em situações dinâmicas. Assim, se, para além das forças e momentos aplicados, se considerarem os efeitos inerciais, estes podem ser tratados como forças e momentos actuantes.

Deste modo, para qualquer mecanismo formado por (n) elementos, o método dos trabalhos virtuais pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sum T_n \cdot \omega_n + \sum F_n \cdot v_v + \sum (-m_n \cdot a_n \cdot v_n) + \sum (-I_n \cdot \alpha_n \cdot \omega_n) = 0 \quad (44)$$

Uma vez que na equação (44) apenas entram as forças e momentos aplicados, o método dos trabalhos virtuais não é útil na resolução de problemas onde se pretendam determinar as forças nas ligações ou reacções presentes nos mecanismos.

4.3.2.3. Análise Dinâmica – Princípio de D'Alembert

Estuda-se, nesta secção, a dinâmica dos corpos rígidos, isto é, as relações existentes entre as forças/momentos que actuam num corpo rígido, a forma e a massa do corpo e o movimento produzido.

Como base desta análise estão as equações do movimento, ou seja: $\Sigma F = m \cdot a_{CG}$, que é a relação entre as forças e a aceleração do centro de gravidade, e $\Sigma T_{CG} = I_{CG} \cdot \alpha$, que relaciona os momentos das forças e o momento angular do sistema em relação ao centro de gravidade.

Considere-se a placa rígida de massa (m) que se desloca sob a acção de várias forças exteriores (F_1), (F_2) e (F_3), situadas no plano da placa, como se ilustra na figura 43.

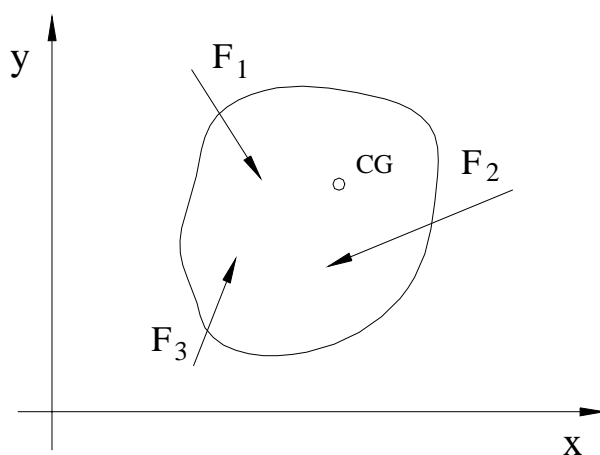


Fig.43 – Placa rígida sujeita à acção de várias forças exteriores.

Escrevendo as equações fundamentais do movimento, que traduzem a segunda lei de Newton, vem que:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= m \cdot a_{x_{CG}} \\ \sum F_y &= m \cdot a_{y_{CG}} \\ \sum T_{CG} &= I_{CG} \cdot \alpha\end{aligned}$$

As equações supra enunciadas mostram que a aceleração linear do centro de gravidade (a_{CG}) da placa e a aceleração angular (α) podem ser obtidas facilmente, assim que a resultante das forças que actuam na placa e o momento resultante em relação ao CG tiverem sido determinadas.

Conhecidas as condições iniciais, as coordenadas (x,y) do centro de gravidade e a coordenada angular (θ) da placa, podem ser obtidas para qualquer instante por integração. Conclui-se, pois, que o movimento da placa é completamente definido pela resultante das forças e pelo momento resultante das forças em relação ao centro de gravidade.

Com efeito, quando um corpo rígido está em movimento plano, existe uma relação fundamental entre as forças que actuam sobre o corpo, a aceleração linear do centro de gravidade e a sua aceleração angular. Esta relação, que está representada na figura 44 na forma de uma equação do diagrama do corpo livre, pode ser usada para determinar as acelerações linear e angular, produzidas por um dado conjunto de forças que actuam sobre um corpo rígido, ou vice-versa, para determinar as forças que um dado movimento do corpo geram.

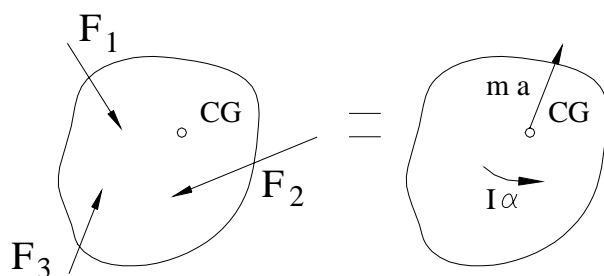


Fig.44 – Lei fundamental do movimento ou segunda lei de Newton.

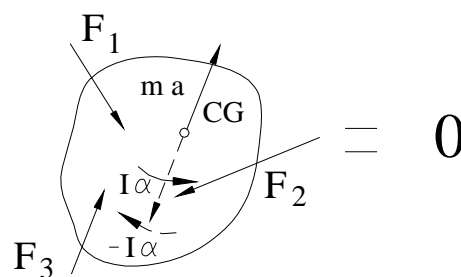


Fig.45 – Princípio de D'Alembert ou equilíbrio dinâmico.

A relação fundamental ilustrada na figura 44 pode ser representada sob outra forma se se adicionar às forças aplicadas as forças de inércia ($-m \cdot a_{CG}$) com sentido contrário ao de (a_{CG}), e um momento de inércia ($-I_{CG} \cdot \alpha$) com sentido contrário ao de (α), como ilustra a figura 45. O sistema que se obtém é equivalente a zero e diz-se que o corpo rígido está em equilíbrio dinâmico, o qual matematicamente, se traduz por:

$$\sum F - m \cdot a_{CG} = 0$$

$$\sum T_{CG} - I_{CG} \cdot \alpha = 0$$

Estas equações traduzem o conhecido princípio de D'Alembert que pode ser enunciado da seguinte forma: *é nula a soma vectorial de todas as forças (aplicadas e de inércia) que actuam sobre um corpo rígido, é também nula a soma vectorial de todos os momentos (aplicados e de inércia).*

Este princípio é aplicável a problemas que envolvam o movimento de vários corpos rígidos ligados entre si (e.g. mecanismos), onde se desenham os diagramas do corpo livre para cada elemento do sistema, resolvendo-se, simultaneamente, as equações daí resultantes.

À semelhança da análise estática, a primeira etapa passa pela identificação de cada um dos elementos que constituem o mecanismo.

Assim, aplicando o princípio de D'Alembert ao mecanismo biela-manivela, resultam os diagramas de equilíbrio apresentados na figura 46.

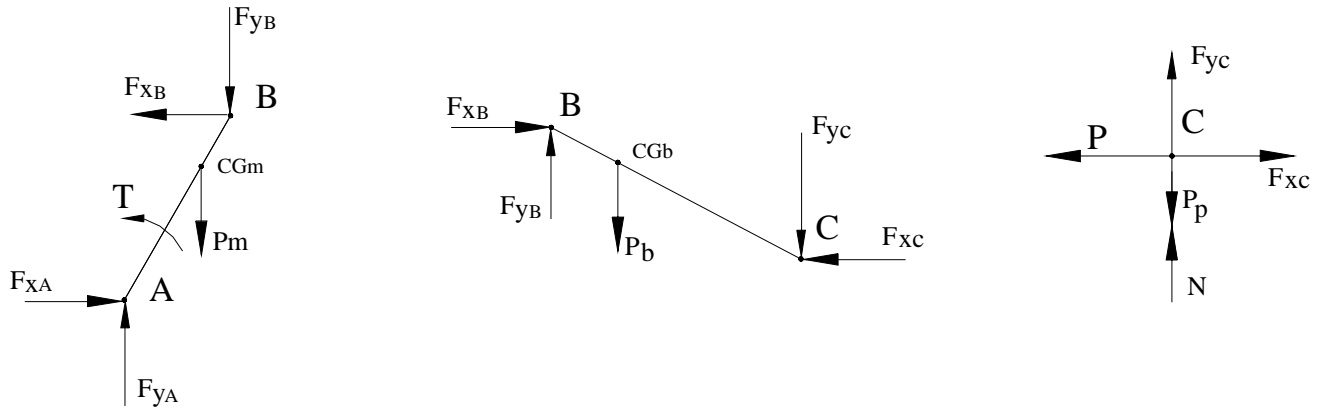


Fig.46 – Diagramas do corpo livre de cada um dos elementos que constituem o mecanismo biela-manivela.

Nesta análise (dinâmica) considerou-se o efeito da gravidade, mas desprezou-se o atrito entre as superfícies em contacto. Arbitrariamente, colocaram-se os centros de gravidade da biela e da manivela a 1/3 do seu comprimento, conforme a figura 46 ilustra. Traduzindo matematicamente os diagramas da figura 46 obtém-se um sistema de equações que permite o cálculo dos esforços envolvidos no mecanismo biela-manivela. Assim resulta,

$$\begin{aligned}
 F_{xC} - P &= m_p \cdot a_{px} \\
 F_{yC} + R_p - P_p &= 0 \\
 F_{xB} - F_{yC} &= m_b \cdot a_{CGb}^x \\
 F_{yB} - F_{yC} - P_b &= m_b \cdot a_{CGb}^y \\
 -F_{xB} \cdot \frac{l}{3} \cdot \sin \varphi - F_{yB} \cdot \frac{l}{3} \cdot \cos \varphi - F_{xC} \cdot \frac{2l}{3} \cdot \sin \varphi - F_{yC} \cdot \frac{2l}{3} \cdot \cos \varphi &= I_{CGb} \cdot \alpha_b \\
 F_{xA} - F_{xB} &= m_m \cdot a_{CGm}^x \\
 F_{yA} - F_{yB} - P_m &= m_m \cdot a_{CGm}^y \\
 T - P_m \cdot \frac{2r}{3} \cdot \cos \theta - F_{yB} \cdot r \cdot \cos \theta + F_{xB} \cdot r \cdot \sin \theta &= 0
 \end{aligned}$$

4.3.3. Métodos Computacionais

4.3.3.1. Dynapak²²

A análise dinâmica do mecanismo biela-manivela, utilizando o programa computacional Dynapak, é feita de modo idêntico ao que foi referido no parágrafo 4.2.3.1., diferindo apenas no facto de, na presente situação, serem introduzidos os valores das massas²³, dos momentos mássicos de inércia e da carga exterior exercida²⁴ no pistão (Cf. figura 47).

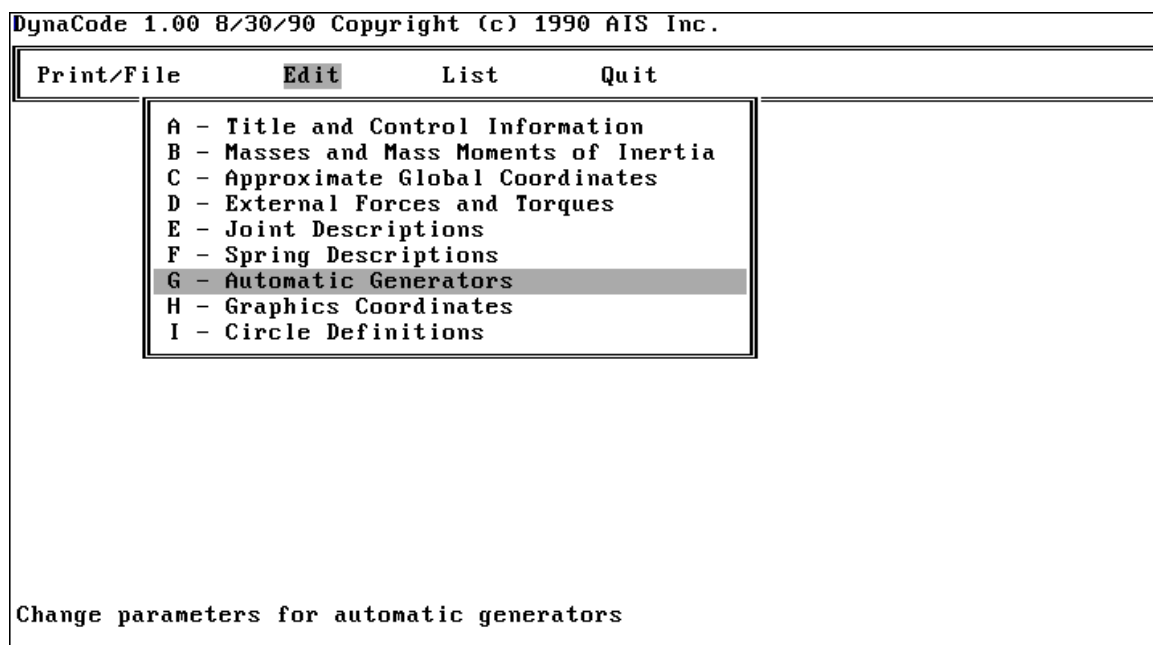


Fig.47 – Introdução dos valores das massas, dos momentos mássicos de inércia e da carga exterior aplicada no pistão, no programa DynaCode.

Introduzidas as novas características do mecanismo biela-manivela pode, agora, proceder-se à sua análise dinâmica, solicitando o programa DynaSolv, onde se especificam as variáveis de saída. Na presente situação, são a posição angular da manivela (LIN 2 PHI) e o momento que é exercido na manivela, ou seja, o binário motor (GEN 1 TRQ), de acordo com a nota da página 50. (Cf. figura 48). No presente exemplo faz-se dois tipos de análise, a análise QUA (análise ‘quasi’-estática, análise onde nem as massas, nem os momentos mássicos de inércia são considerados) e análise DYN (análise dinâmica, onde são consideradas as massas e os momentos mássicos de inércia dos corpos) (Cf. figura 48).

²² Este programa possibilita o cálculo de esforços em sistemas articulados (e.g. treliças), com especial interesse para sistemas articulados hiperstáticos.

²³ Por sistema, no programa computacional Dynapak, o elemento número 1 (o fixe) tem, sempre, massa e momento mássico de inércia nulos.

²⁴ O programa computacional Dynapak apenas aceita cargas aplicadas no centro de gravidade de cada ligação.

```

NUMEBER OF OUTPUTS?
2 LIN 2 phi GEN 1 TRQ

      TIME      LIN 2,PHI  GEN 1,TRQ

      VELOCITIES AND DISPLACEMENTS
      DX          DY          DPH          X          Y          PHI
.0000E+00 .0000E+00 .3142E+02 .0000E+00 .0000E+00 -.1571E+01
.8951E-05 .2394E+01 -.7854E+01 .7620E-01 -.2849E-06 .9348E-06
.1119E-04 .0000E+00 .0000E+00 .3810E+00 .0000E+00 .0000E+00

      ACCELERATIONS
      AX          AY          ALPHA
.0000E+00 .0000E+00 .0000E+00
-.7521E+02 .2812E-03 -.8649E-03
-.9401E+02 .0000E+00 .0000E+00

      TIME      LIN 2,PHI  GEN 1,TRQ
.00000E+00 -.157E+01 .000E+00

<HIT ENTER TO CONTINUE>

```

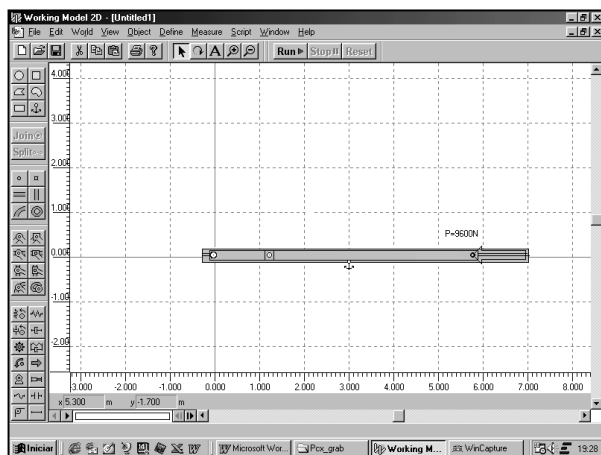
Fig.48 – Análise dinâmica do mecanismo biela-manivela, no programa DynaSolv.

À semelhança do que acontece na análise cinemática, os resultados são ilustrados no ecrã e, ulteriormente, guardados num ficheiro de texto.

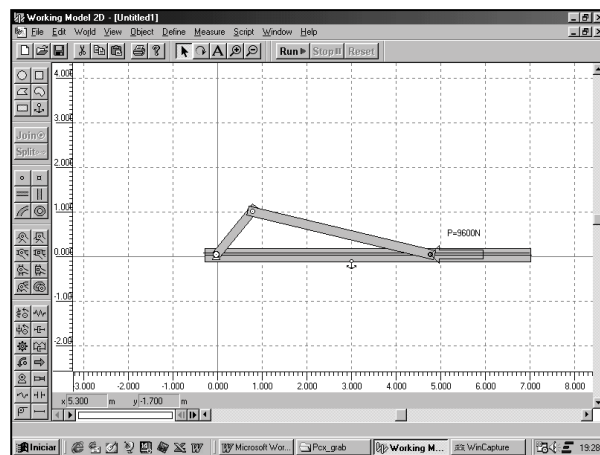
A animação do mecanismo é em tudo idêntica ao que foi referido no parágrafo 4.2.3.1. relativo à análise cinemática.

4.3.3.2. Working Model

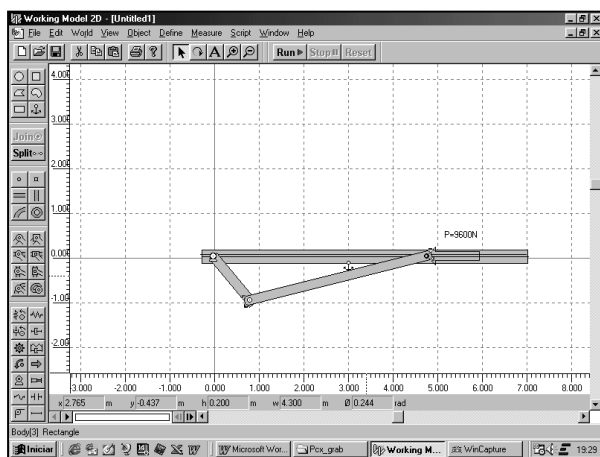
A análise dinâmica do mecanismo biela-manivela, utilizando o programa computacional Working Model, é feita de modo idêntico ao do parágrafo 4.2.3.2., diferindo apenas no facto de, na presente situação, a variável de saída ser o binário motor (“*torque of motor*”), como mostra a figura 49, fases (a) a (d).



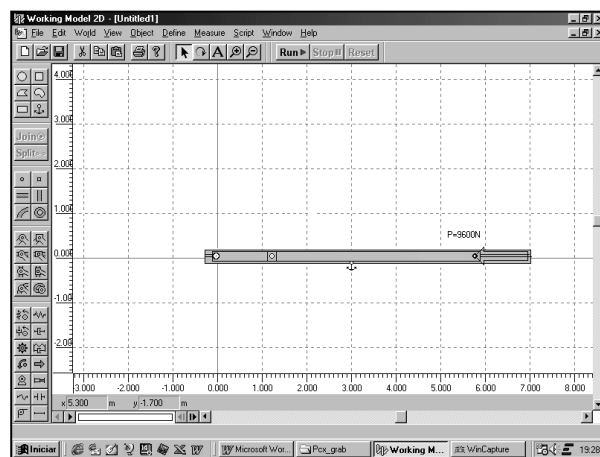
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig.49 – Análise dinâmica do mecanismo biela-manivela com auxílio do programa Working Model 2D, evidenciam-se, ainda, 4 fases do seu movimento.

4.4. Aferição dos Resultados

Nesta secção faz-se a aferição e comparação dos resultados obtidos na análise do mecanismo biela-manivela pelos diversos métodos de cálculo e salientam-se, ainda, algumas conclusões que se julgam pertinentes.

As propriedades geométricas do mecanismo são as seguintes:

- comprimento da manivela, $r = 76,2\text{mm}$;
- comprimento da biela, $l = 304,8\text{mm}$.

Inicialmente, as barras 2 e 3 estão alinhadas segundo a direcção (xx), correspondendo ao ponto morto superior, sendo a velocidade angular da manivela constante e igual a 300rpm no sentido directo. Na presente situação considerou-se o valor da carga P constante e igual a 9600N (Cf. figura 50).

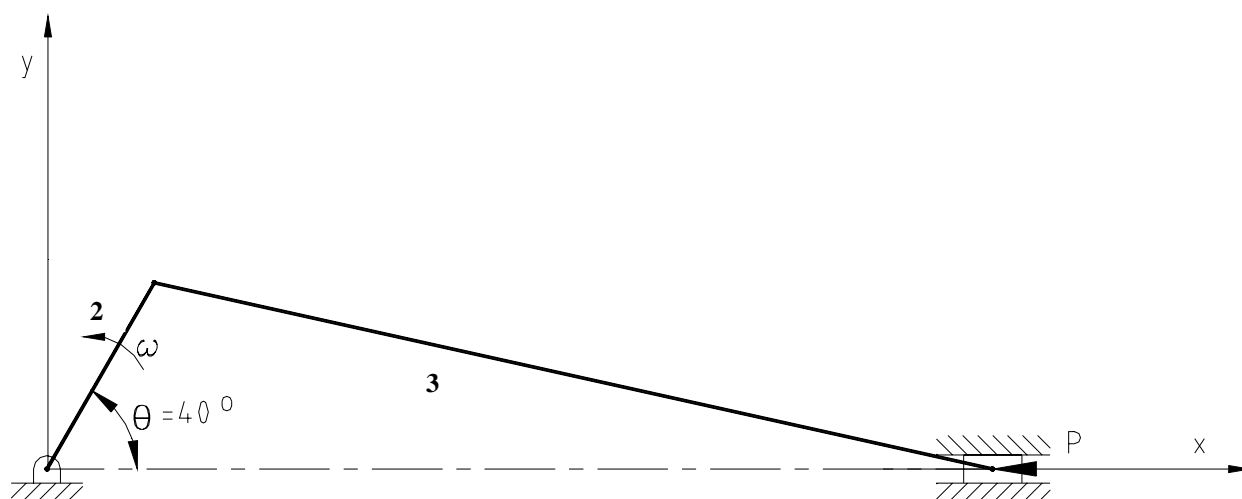


Fig.50 – Representação esquemática do mecanismo biela-manivela.

Por simplicidade e comodidade, nesta análise, principalmente no que respeita aos métodos gráficos, apenas se apresentam resultados de uma fase particular do mecanismo e que corresponde à posição angular da manivela igual a 40°.

Com efeito, o quadro I apresenta os resultados relativos à análise cinemática do mecanismo biela-manivela, designadamente, a posição, a velocidade e a aceleração do pistão. Ainda no mesmo quadro, constam as diferenças percentuais tendo como referência o método algébrico.

MÉTODO UTILIZADO	x _P [m]	v _P [m/s]	a _P [m/s ²]		
Algébrico	0,3952	-1,8373	-61,2156		
Algébrico com simplificação matemática		-1,8305 -0,37%*	-60,8762 -0,55%*		
Projecções das velocidades		-1,8373	-61,2156		
Notação Complexa					
Notação Matricial					
Decomposição do movimento	-				
Polígono de velocidades / acelerações	0,3952	-1,8373	-61,2156		
Centros instantâneos de rotação				-	
Diferenciação gráfica				-1,9214 +4,58%*	-64,2947 +5,03%*
Dynapak				0,3592 0,00%*	-1,8365 -0,44%*
Working Model 2D	0,3592 -0,00%*	-1,8370 -0,02%*	-61,2115 0,00%*		

* Diferença percentual relativamente ao valor obtido pelo método algébrico.

Quadro I – Cálculo da posição, da velocidade e da aceleração do pistão do mecanismo biela-manivela, utilizando os diversos métodos de cálculo.

No atinente à análise dinâmica, nomeadamente no que diz respeito ao cálculo do momento actuante na manivela, para além das propriedades geométricas anteriormente referidas, consideraram-se as seguintes características das ligações:

- massa da manivela, $m_m = 1\text{kg}$;
- massa da biela, $m_b = 0,5\text{ kg}$;
- massa do pistão, $m_p = 4\text{kg}$;
- momento mássico de inércia da manivela, $I_m = 0,0001\text{ kgm}^2$;
- momento mássico de inércia da biela, $I_b = 0,0001\text{ kgm}^2$.

Os resultados relativos ao cálculo do momento exercido na manivela estão resumidos no quadro II.

MÉTODO UTILIZADO	Binário motor ²⁵ [Nm]	Binário motor ²⁶ [Nm]
Diagrama do corpo livre	-561,4506	-
Trabalhos virtuais	-561,4506	-545,6481
Princípio de D'Alembert	-	-545,6481 0,00%*
Dynapak	-561,2443 -0,04%*	-545,4566 -0,04%*
Working Model 2D	-560,9500 -0,09%*	-548,1010 +0,45%*

* Diferença percentual relativamente aos valores obtidos pelo método dos trabalhos virtuais.

Quadro II – Cálculo do momento actuante na manivela utilizando os diferentes métodos de cálculo.

Da análise do quadro I, observa-se que os resultados obtidos pelos métodos analíticos, à excepção do método algébrico com simplificação matemática, são exactamente iguais. De referir ainda que, quando se pretende analisar mais do que uma fase do movimento, devem utilizar-se, preferencialmente, os métodos analíticos associados à programação informática. Quando se conhece a fase crítica do movimento, podem preterir-se os métodos analíticos e utilizar os métodos gráficos devido não só à sua rapidez, como também ao seu rigor.

Da análise do quadro II, verifica-se que, neste caso concreto, a diferença entre os valores obtidos pela análise estática e pela análise dinâmica é apenas de 2,8%, o que justifica que, frequentes vezes, se faça a análise estática, bastante mais simples e com rigor satisfatório, em detrimento da análise dinâmica mais rigorosa e realista.

²⁵ Análise estática

²⁶ Análise dinâmica

5. Estudo de um sistema aberto – O mecanismo came-seguidor

5.1. Descrição do Mecanismo

5.1.1. Generalidades e Classificação

Utilizando unicamente mecanismos articulados, nem sempre é possível realizar com rigor determinados movimentos, porventura impostos. As cames²⁷, órgãos mecânicos cujas superfícies podem ter as mais diversas formas, permitem, com comodidade e precisão, resolver grande número daqueles problemas. Utilizam-se mecanismos de came-seguidor nas mais variadas máquinas e mecanismos de uso corrente, como, por exemplo, em máquinas têxteis, em máquinas-ferramenta, etc. De uma forma genérica, pode definir-se mecanismo came-seguidor como sendo um sistema mecânico cuja finalidade é transmitir, por contacto directo, um determinado movimento. Os órgãos motor e accionado denominam-se, respectivamente, came e elemento movido ou seguidor.

A figura 51 ilustra, esquematicamente, o mecanismo came-seguidor cuja came é de disco e o seguidor é translacional de rolete concêntrico. Ainda na figura 51 consta alguma nomenclatura básica, nomeadamente, o perfil da came²⁸, o ponto de traçagem²⁹, a curva primitiva³⁰, a circunferência de base³¹ e a circunferência primitiva³².

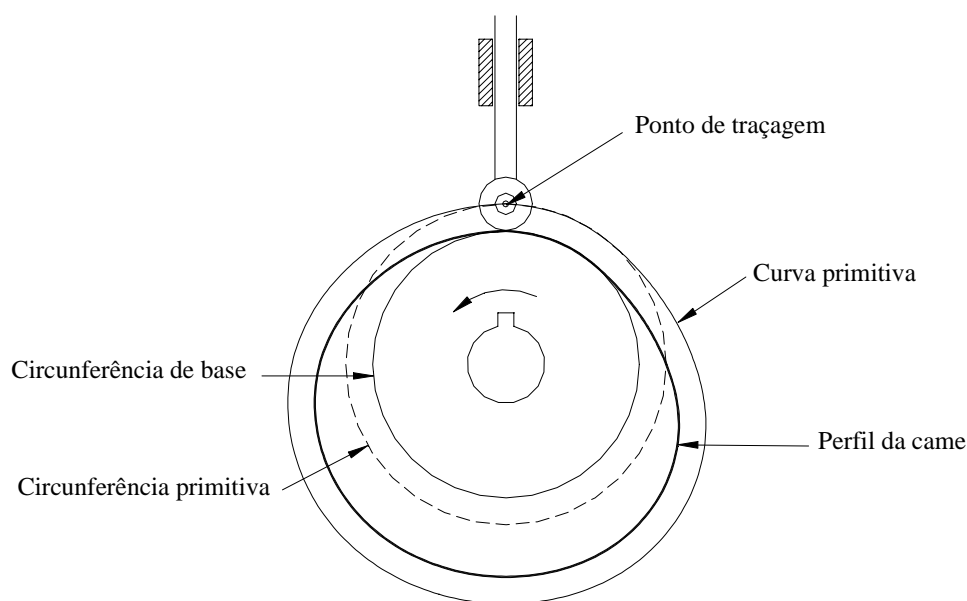


Fig.51 – Representação esquemática do mecanismo came-seguidor.

²⁷ Na breve descrição que se faz no âmbito do estudo de um sistema aberto – o mecanismo came-seguidor – consideram-se exclusivamente cames de disco, já que constituem a maioria das cames de utilização corrente.

²⁸ Perfil de came é a secção recta da superfície de trabalho da came.

²⁹ Ponto de traçagem é o ponto do elemento movido localizado no eixo do rolete, na aresta da faca ou no centro da curvatura de uma superfície de contacto esférico, dependendo do tipo de elemento movido.

³⁰ Curva primitiva é a curva descrita pelo ponto de traçagem.

³¹ Circunferência de base é a menor circunferência que se pode inscrever no perfil da came com centro no seu eixo de rotação.

³² Circunferência primitiva é a menor circunferência que se pode inscrever na curva primitiva com centro no eixo de rotação.

Vários são os critérios que possibilitam a classificação do mecanismo came-seguidor. Assim, se o critério for a forma da came, consideram-se três grupos principais, a saber: cames de translação, cames de disco e cames cilíndricas (Cf. figura 52).

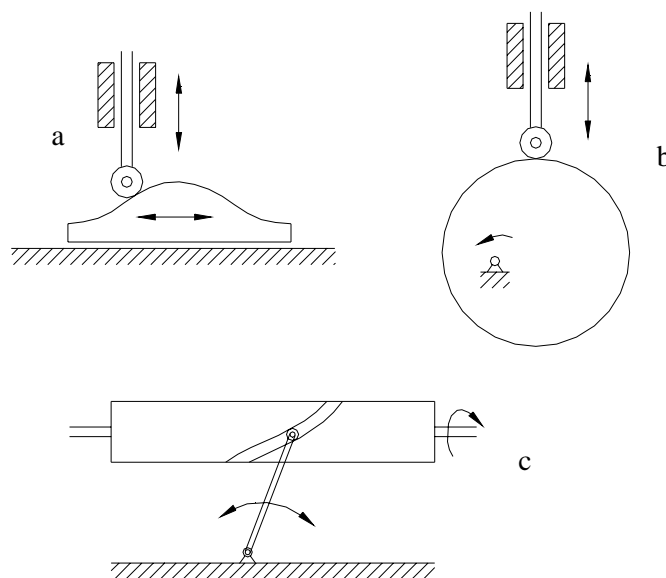


Fig.52 – Classificação do mecanismo came-seguidor quanto à forma da came.
a) Came de translação b) Came de disco c) Came cilíndrica.

Outro modo de agrupar o mecanismo came-seguidor é o que se baseia na classificação do seguidor, o qual pode classificar-se segundo três critérios básicos: quanto ao movimento, quanto à trajectória e quanto ao contacto.

Deste modo, relativamente ao movimento permitido pode haver seguidores translacionais ou seguidores oscilantes (Cf. figura 53).

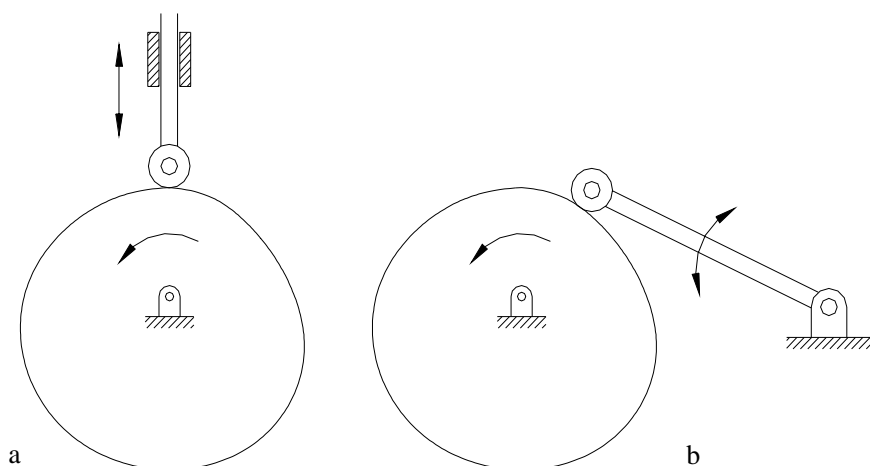


Fig.53 – Classificação do mecanismo came-seguidor quanto ao movimento do seguidor.
a) Seguidor translacional b) Seguidor oscilante.

Se se classificar a trajectória do seguidor em relação ao eixo da came, pode ter-se seguidores radiais ou seguidores transversais ou axiais (Cf. figura 54).

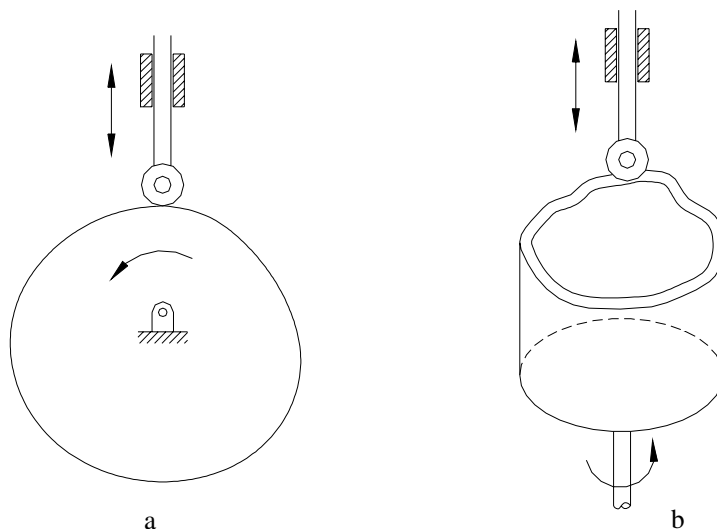


Fig.54 – Classificação do mecanismo came-seguidor segundo a trajectória do seguidor. a) Seguidor radial b) Seguidor transversal ou axial.

Se se classificar o seguidor pela forma como este contacta com a superfície da came, pode haver seguidores de faca, de rolete, de prato ou pé plano e esféricos (Cf. figura 55).

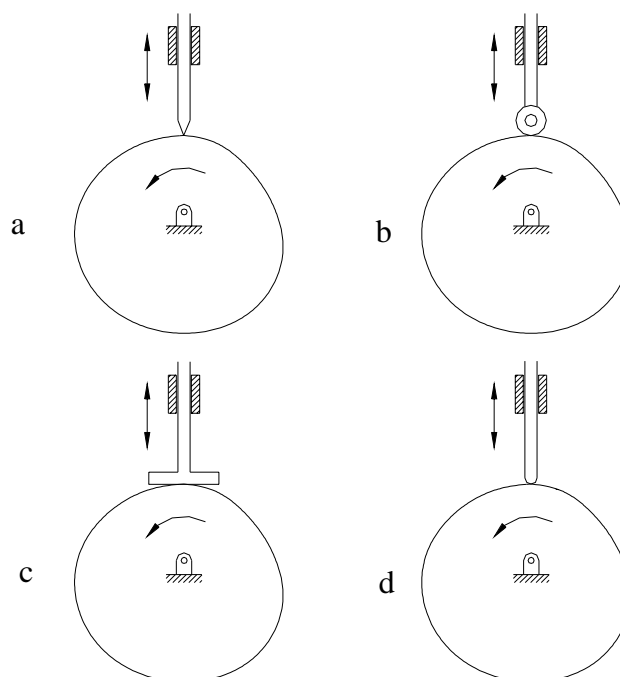


Fig.55 – Classificação do mecanismo came-seguidor quanto ao contacto entre o seguidor e a came. a) Seguidor de faca b) Seguidor de rolete, c) Seguidor de prato ou pé plano d) Seguidor esférico.

Outro critério que complementa a classificação do mecanismo came-seguidor é o que se baseia na sequência de movimentos do elemento movido. Assim, podem considerar-se quatro tipos de sequência: ELE (Estacionamento, Levantamento, Estacionamento), ELAE (Estacionamento, Levantamento, Abaixamento, Estacionamento), LAL (Levantamento, Abaixamento, Levantamento) e EAE (Estacionamento, Abaixamento, Estacionamento), como ilustra a figura 56.

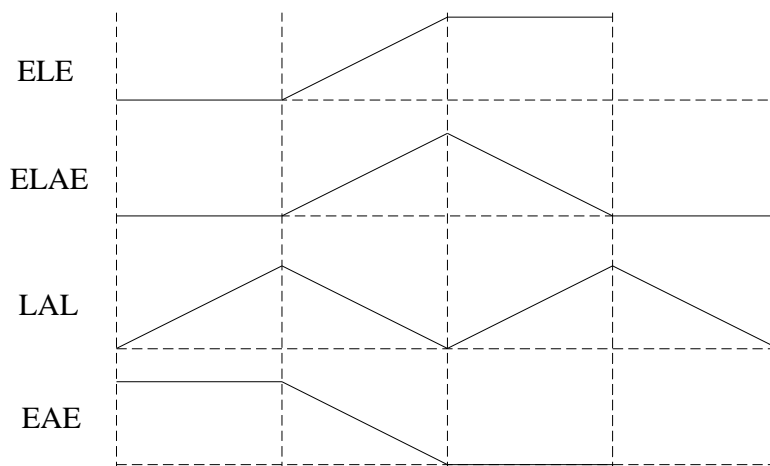


Fig.56 – Tipos de sequência do movimento do seguidor.

A sequência de movimentos do seguidor ELE é a mais corrente na construção de máquinas, em que, no início do movimento da came, o elemento movido se mantém estacionário, realiza depois um deslocamento e estaciona novamente. Este tipo de sequência está normalmente associado à sequência EAE, cuja análise é idêntica, permitindo o retorno do elemento movido à posição inicial. Nos perfis ELAE o levantamento e o abaixamento são, respectivamente, antecidos e seguidos por um estacionamento. Na sequência LAL não existe qualquer estacionamento do elemento movido. Enquadram-se neste caso os excêntricos.

5.1.2. Curvas Básicas

Conquanto a maioria das came sejam projectadas com o objectivo de transmitir ao elemento movido um determinado movimento, na prática, procura-se, sempre que possível, a obediência a determinadas curvas básicas. Com efeito, se, teoricamente, existe uma infinidade de soluções quando se pretende um determinado deslocamento do seguidor para um dado ângulo de rotação da came, do ponto de vista prático, essas soluções são limitadas por aspectos cinemáticos e dinâmicos do sistema. De facto, há curvas de deslocamento que se comportam bem a baixas rotações. No entanto, originam grandes esforços e vibrações quando aplicadas a velocidades elevadas.

As equações dos deslocamentos do elemento movido são sempre da forma $y=f(\theta)$, sendo (y) o deslocamento e (θ) o ângulo de rotação da came. Considerando que a came roda com velocidade constante, pode escrever-se $y=f_1(t)$ com $\theta=\omega t$, onde (t) é tempo em que a came roda o ângulo (θ) e (ω) a velocidade angular da came.

Por derivações sucessivas da expressão dos deslocamentos, obtêm-se as equações da velocidade, da aceleração e do impulso ou choque do seguidor.

As curvas básicas que no diagrama dos deslocamentos³³ determinam, quer o levantamento, quer o abaixamento, podem agrupar-se em duas grandes famílias: as polinomiais e as trigonométricas. A figura 57 sintetiza cada uma destas famílias.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Polinomiais} \left\{ \begin{array}{l} \text{Monomiais}(y = \theta^n) \left\{ \begin{array}{l} n = 1 \rightarrow \text{recta} \\ n = 2 \rightarrow \text{parábola} \\ n = 3 \rightarrow \text{cúbica} \end{array} \right. \\ \text{Polinomiais}(y = c_0 + c_1\theta + c_2\theta^2 + \dots + c_n\theta^n) \end{array} \right. \\ \text{Trigonométricas} \left\{ \begin{array}{l} \text{Harmónica} \left\{ \begin{array}{l} \text{Simple} \\ \text{Dupla} \end{array} \right. \\ \text{Elíptica} \\ \text{Cilcoidal} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Fig.57 – Curvas básicas que se utilizam para determinar o deslocamento do seguidor.

³³ O diagrama dos deslocamentos é a representação cartesiana do movimento do seguidor durante um ciclo operacional da came. No eixo das abcissas representam-se os ângulos de rotação da came e no eixo das ordenadas os correspondentes deslocamentos do elemento movido.

As curvas básicas mais comumente estudadas são as polinomiais de movimento uniforme e parabólico, enquanto que as trigonométricas são a harmónica simples e a cicloidal. Cada uma destas curvas tem equações específicas que permitem determinar as características cinemáticas (deslocamento, velocidade, aceleração e impulso) do movimento do seguidor, as quais estão resumidas no quadro III.

Movimento	Deslocamento		Velocidade	Aceleração	Impulso
Uniforme	$\frac{h\theta}{\beta}$		$\frac{h\omega}{\beta}$	0	-
Parabólico	$\frac{\theta}{\beta} \leq 0,5$	$2h\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2$	$\frac{4h\omega\theta}{\beta^2}$	$\frac{4h\omega^2}{\beta^2}$	0
	$\frac{\theta}{\beta} \geq 0,5$	$h\left[1-2\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)^2\right]$	$\frac{4h\omega}{\beta}\left(1-\frac{\theta}{\beta}\right)$	$-\frac{4h\omega^2}{\beta^2}$	0
Harmónico	$\frac{h}{2}\left(1-\cos\frac{\pi\theta}{\beta}\right)$		$\frac{h\pi\omega}{2\beta}\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$	$\frac{h}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\beta}\right)^2\cos\frac{\pi\theta}{\beta}$	$-\frac{h}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\beta}\right)^3\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$
Cicloidal	$\frac{h}{\pi}\left(\frac{\theta}{\beta}-\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$		$\frac{h\omega}{\beta}\left(1-\cos\frac{2\pi\theta}{\beta}\right)$	$2h\pi\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2\sin\frac{2\pi\theta}{\beta}$	$4h\pi^2\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^3\cos\frac{2\pi\theta}{\beta}$

Quadro III – Equações que permitem determinar as características cinemáticas do movimento do seguidor, para as quatro curvas básicas mais correntemente estudadas.

Nas equações do quadro III, (h) representa o deslocamento máximo do seguidor, (θ) o ângulo de rotação da came, (β) o ângulo de rotação da came para o deslocamento (h) e (ω) a velocidade angular da came.

Com o objectivo de obter um critério de comparação das quatro curvas referidas, reduziu-se à unidade os valores de (h), (ω) e (β), e calculou-se, de seguida, os valores máximos de cada grandeza cinemática. Desprezando as descontinuidades no início e no fim do movimento e no ponto de inflexão do movimento parabólico, os resultados podem resumir-se no quadro IV. [50]

Tipo de movimento	V _{máxima}	a _{máxima}	i _{máximo}
Uniforme	1	0	0
Parabólico	2	4	0
Harmónico simples	$\pi/2$	$\pi^2/2$	$\pi^3/2$
Cicloidal	2	2π	$4\pi^2$

Quadro IV – Valores máximos da velocidade, da aceleração e do impulso para os quatro movimentos básicos. {adaptado de [50]}

A figura 58, que complementa o quadro IV, apresenta os diagramas de velocidades, de acelerações e de impulsos para cada um dos quatro movimentos básicos.

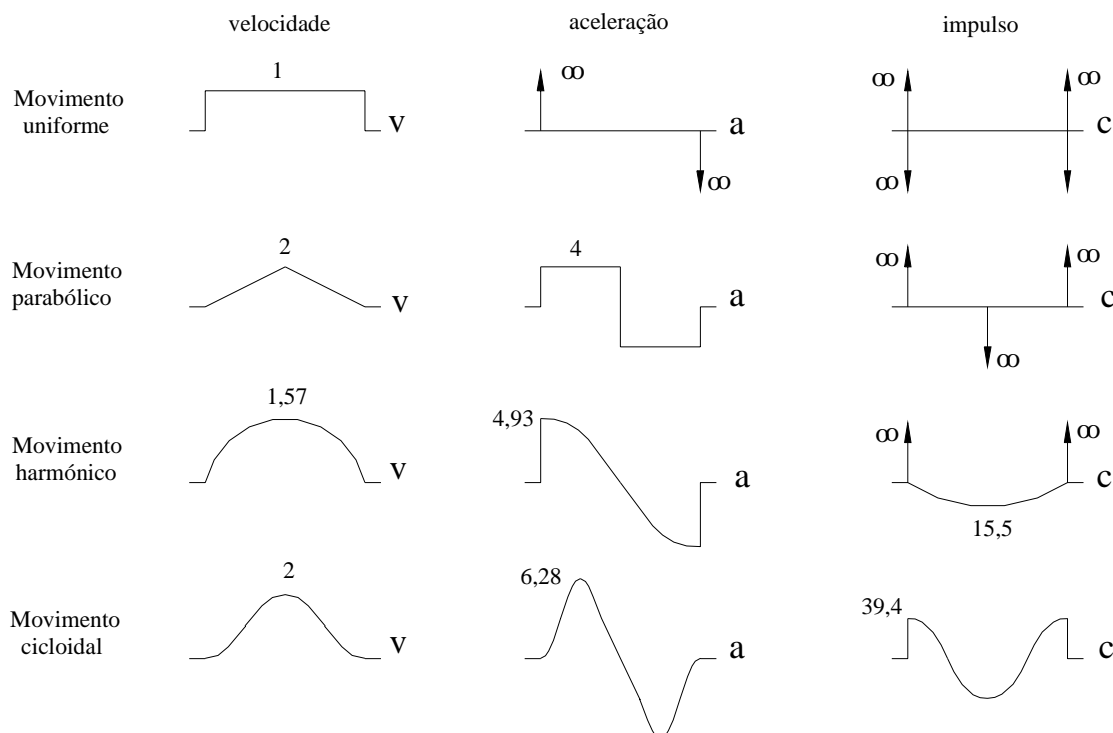


Fig. 58 – Comparação das características cinemáticas dos quatro movimentos básicos que começam e acabam em estacionamento. {adaptado de [18,50]}

O movimento uniforme apenas se apresenta pelo seu interesse académico, uma vez que as acelerações infinitas e os choques originam inconvenientes mesmo quando operam a velocidades baixas.

Da figura 58 observa-se que os movimentos parabólico e harmónico simples apresentam, em três e duas fases, respectivamente, choques infinitos, pelo que se utilizam, principalmente, para velocidades baixas ou moderadas.

Embora as elevadas acelerações inerentes no movimento cicloidal possam originar problemas cinemático-dinâmicos nos mecanismos, para altas velocidades, este é, sem dúvida, o melhor dos movimentos básicos apresentados, uma vez que tem choques finitos, reduzindo o ruído, as vibrações e a fadiga nos componentes dos mecanismos.

5.1.3. Mecanismos Came-seguidor Analisados

Na presente secção descrevem-se três mecanismos came-seguidor analisados no âmbito do estudo cinemático-dinâmico de um sistema aberto, os quais apenas diferem no tipo de seguidor. Com efeito, nos três mecanismos analisados a came é de disco enquanto o seguidor tem três formas distintas, a saber: de faca ou gume, de rolete e de prato ou pé plano.

Assim, no primeiro mecanismo a came é de disco e o seguidor é translacional de faca concêntrico, como se ilustra a figura 59.

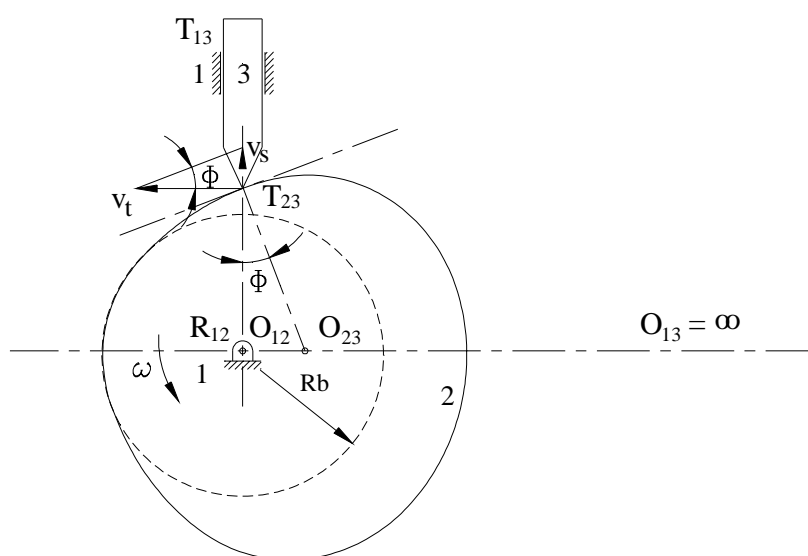


Fig. 59 – Mecanismo came-seguidor cuja came é de disco e o seguidor é translacional de faca concêntrico.

Os pares cinemáticos do mecanismo came-seguidor da figura 59, em consonância com a secção 3.1., podem classificar-se do seguinte modo:

- par cinemático R_{12} : rotóide inferior fechado;
- par cinemático T_{13} : deslizante inferior fechado;
- par cinemático T_{23} : deslizante superior aberto.

Relativamente à mobilidade, aplicando o critério de Grübler, o mecanismo possui um grau de liberdade ($GDL=3 \times (3-1) - 2 \times 2 - 1$), uma vez tratar-se de três ligações, dois pares cinemáticos primários e um par cinemático secundário.

A determinação e localização dos centros instantâneos de rotação é feita com base no que foi apresentado em 3.3. Assim, aplicando a expressão (2) resulta que o número de CIR's é igual a três, e que são O_{12} , O_{13} e O_{23} . Por inspecção directa é possível localizar os centros O_{12} e O_{13} . A determinação da posição do centro O_{23} obtém-se pela aplicação do teorema da normal comum combinado com o teorema dos três centros ou de Aronhold-Kennedy. Assim, a localização do centro O_{23} resulta da intersecção da normal comum às ligações 2 e 3 com a direcção definida pelos centros O_{12} e O_{13} (Cf. figura 59).

O ângulo de pressão (Φ) é o ângulo formado pela direcção segundo a qual o seguidor empurra a came e a direcção do seu movimento. O projecto de uma came deve estabelecer o melhor compromisso entre as suas dimensões e o ângulo de pressão. De facto, um ângulo de pressão elevado, aliado a um coeficiente de atrito came/seguidor também elevado, pode provocar o encravamento do mecanismo. Aumentando as dimensões da came pode reduzir-se o ângulo de pressão, no entanto, comes de grandes dimensões originam por um lado, maior desequilíbrio no eixo de rotação e, por outro, obrigam ao aumento das dimensões dos restantes componentes.

É prática corrente utilizar valores para o ângulo de pressão inferiores a 30° , se bem que, para cargas reduzidas e coeficientes de atrito muito baixos seja possível operar acima dos 35° . [13,30]

Atendendo à geometria da figura 59 é válida a seguinte relação para o ângulo (Φ):

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{v_s}{v_t} \quad (45)$$

em que (v_s) é a velocidade do seguidor e (v_t) é a velocidade tangencial no ponto de contacto entre a came e o seguidor.

Sabendo que $v_t = (R_b + s) \cdot \omega$ e substituindo na expressão (45) vem que:

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{v_s}{(R_b + s) \cdot \omega} \quad (46)$$

onde (R_b) é o raio da circunferência de base da came, (s) é o deslocamento do seguidor e (ω) é a velocidade de rotação da came.

Da expressão (46) observa-se que o valor máximo de (Φ) ocorre quando (v_s) e (s) assumem, respectivamente, os valores máximo e mínimo. O valor de (Φ) pode reduzir-se diminuindo a amplitude da velocidade do seguidor (v_s) ou aumentando o raio da circunferência de base (R_b). Contudo, com o aumento de (R_b), aumentam-se também as dimensões dos componentes do mecanismo e, consequentemente, os efeitos de inércia.

No segundo mecanismo came-seguidor analisado, a came é de disco e o seguidor é translacional de rolete concêntrico (Cf. figura 60).

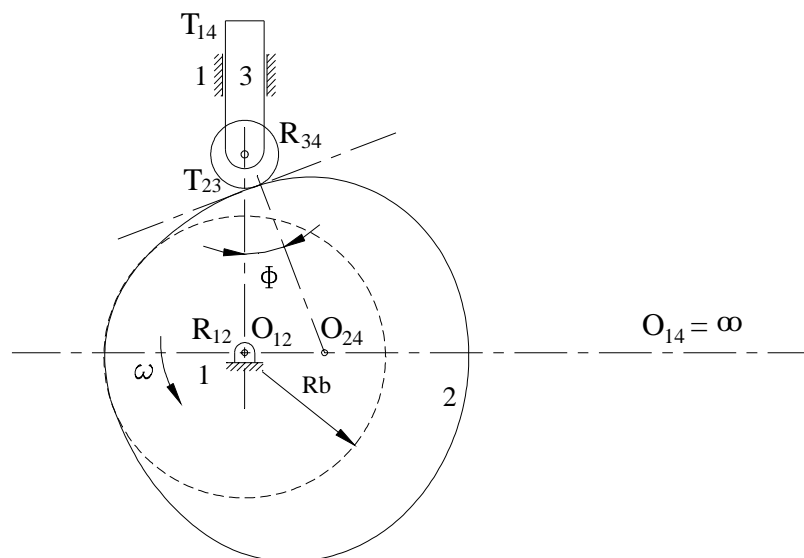


Fig. 60 – Mecanismo came-seguidor cuja came é de disco e o seguidor é translacional de rolete concêntrico.

Os pares cinemáticos do mecanismo representado na figura 60 podem ser classificados do seguinte modo:

- par cinemático R_{12} : rotóide inferior fechado;
- par cinemático T_{14} : deslizante inferior fechado;
- par cinemático T_{23} : deslizante superior aberto;
- par cinemático R_{34} : rotóide inferior fechado.

No atinente à mobilidade, aplicando o critério de Grübler, o mecanismo possui dois graus de liberdade, ($GDL=3 \times (4-1) - 2 \times 3 - 1 = 2$), uma vez tratar-se de quatro ligações, três pares cinemáticos primários e um par cinemático secundário. No entanto, um dos graus de liberdade é passivo ou redundante, quer isto dizer que um gerador de movimento é suficiente para accionar o mecanismo.

O terceiro mecanismo analisado é o que se ilustra na figura 61 cuja came é ainda de disco e o seguidor é translacional de prato ou pé plano. A classificação dos seus pares cinemáticos, a determinação do número de graus de liberdade e a localização dos centros instantâneos de rotação é em tudo idêntica ao que foi feito para o mecanismo da figura 59.

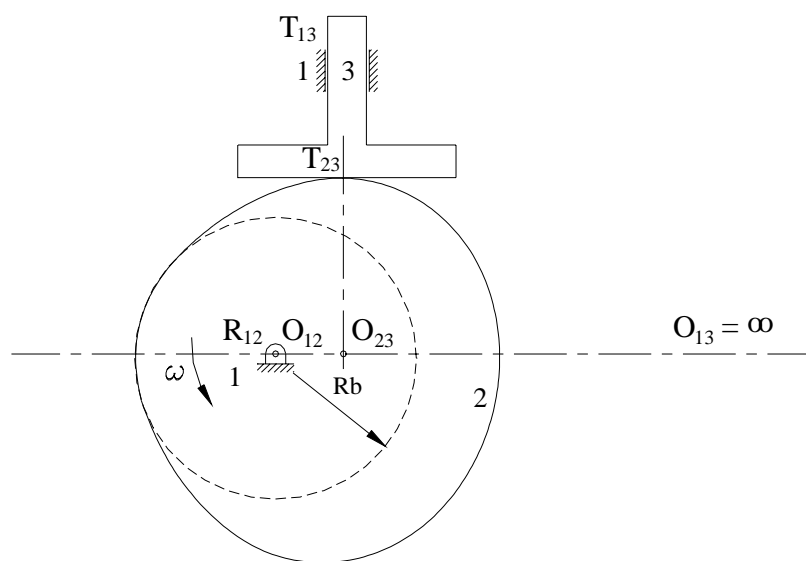


Fig. 61 – Mecanismo came-seguidor cuja came é de disco e o seguidor é translacional de prato ou pé plano.

5.2. Análise Cinemática

5.2.1. Métodos Analíticos

De um modo geral, quando se projecta um mecanismo came-seguidor pretende-se determinar, algébrica ou graficamente, o perfil da came que garanta o movimento do seguidor previamente definido. A solução algébrica exige que este movimento obedeça a uma lei traduzível por uma expressão matemática, enquanto que a solução gráfica é aplicável a qualquer perfil de deslocamentos. Por esta razão e pela sua simplicidade, o processo gráfico impõe-se na maioria dos casos.

De seguida apresenta-se o método analítico que permite obter o perfil da came para os mecanismos came-seguidor descritos em 5.1.3.

Na presente secção a sequência de movimentos do seguidor é a seguinte: levantamento (h) durante 180° com movimento harmónico simples seguido de abaixamento durante os restantes 180° também com movimento harmónico simples. As características cinemáticas (o deslocamento, a velocidade, a aceleração e o impulso) relativos ao movimento harmónico simples obtém-se pela aplicação das respectivas equações apresentadas no quadro III da página 76.

Com efeito, o primeiro mecanismo analisado é o que se ilustra da figura 62, na qual está representada a inversão do mecanismo came-seguidor, o que significa que a came é fixa e o seguidor move-se relativamente aquela, ou seja, o seguidor roda ângulo (θ) ao mesmo tempo descreve a translação (s).

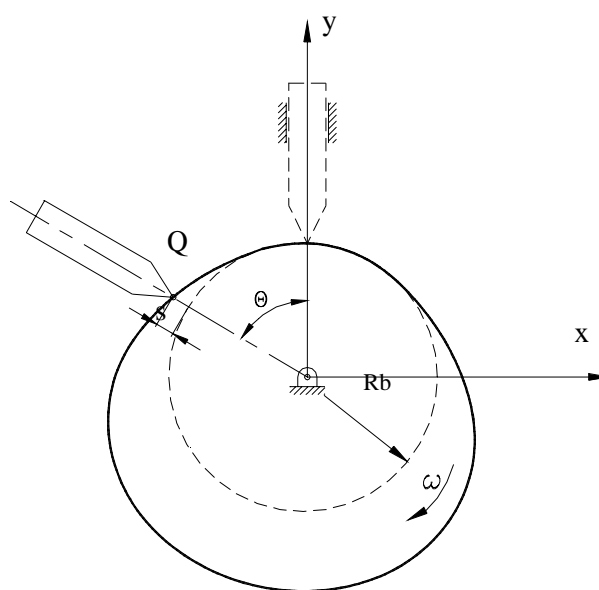


Fig.62 – Mecanismo came-seguidor onde se representa o movimento do seguidor relativamente à came, o qual consiste na translação (s) do seguidor durante a rotação (θ). O ponto Q representa o ponto de contacto entre a came e o seguidor.

As coordenadas do ponto Q que gera o perfil da came são dadas por:

$$x_Q = -(R_b + s) \cdot \sin \theta \quad (47)$$

$$y_Q = (R_b + s) \cdot \cos \theta \quad (48)$$

em que (R_b) é o raio de base da came, (s) é o deslocamento do seguidor e (θ) o ângulo de rotação da came.

A figura 63 ilustra o mecanismo came-seguidor cuja came é disco e o seguidor é do tipo translacional de rolete concêntrico. Tal como no mecanismo da figura 62, o raio de base é (R_b) , o deslocamento do seguidor é (s) e (θ) o ângulo de rotação da came, sendo (R_s) o raio do rolete.

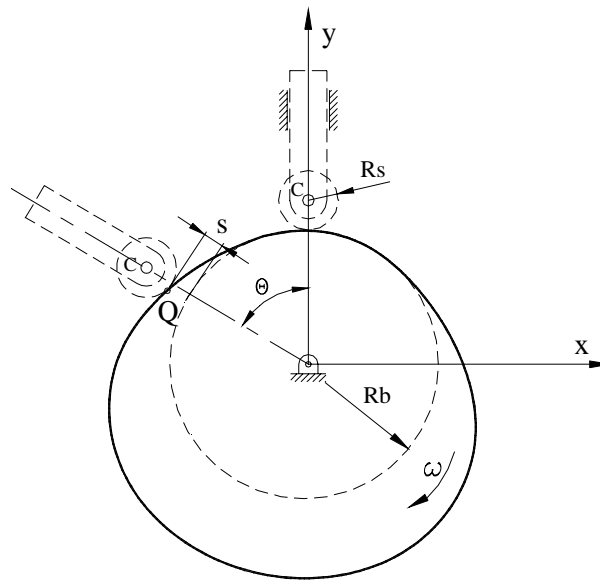


Fig.63 – Mecanismo came-seguidor onde se representa o movimento do seguidor relativamente à came, o qual consiste na translação (s) do seguidor durante a rotação (θ) {adaptado de [55]}.

A família de equações das circunferências descritas pelo rolete é dada por:

$$F(x, y, \theta) = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - R_s^2 = 0 \quad (49)$$

em que (x_c, y_c) representam as coordenadas do centro do rolete, as quais para a posição representada na figura 63 são:

$$x_c = -(R_b + R_s) \cdot \sin \theta - s \cdot \sin \theta \quad (50)$$

$$y_c = (R_b + R_s) \cdot \cos \theta + s \cdot \cos \theta \quad (51)$$

Atendendo a que (θ) é o parâmetro da família de circunferências, efectuando a derivada parcial da equação (49) resulta:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -2 \cdot (x - x_c) \cdot \frac{dx_c}{d\theta} - 2 \cdot (y - y_c) \cdot \frac{dy_c}{d\theta} = 0 \quad (52)$$

onde, das equações (50) e (51)

$$\frac{dx_c}{d\theta} = -(R_b + R_s) \cos \theta - s \cdot \cos \theta - \frac{ds}{d\theta} \sin \theta \quad (53)$$

$$\frac{dy_c}{d\theta} = -(R_b + R_s) \sin \theta - s \cdot \sin \theta + \frac{ds}{d\theta} \cos \theta \quad (54)$$

Resolvendo, simultaneamente, (49) e (52) obtém-se as expressões que permitem determinar as coordenadas do perfil da came:

$$x_Q = x_c \pm R_s \cdot \frac{dy_c}{d\theta} \cdot \left[\left(\frac{dx_c}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy_c}{d\theta} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (55)$$

$$y_Q = y_c \mp R_s \cdot \frac{dx_c}{d\theta} \cdot \left[\left(\frac{dx_c}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy_c}{d\theta} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (56)$$

em que (R_s) é o raio do rolete, (x_c) , (y_c) , $(dx_c/d\theta)$ e $(dy_c/d\theta)$ são dados pelas equações (50), (51), (53) e (54), respectivamente.

Note-se os sinais (\pm) e (\mp) presentes nas equações (55) e (56) que reflectem o facto de se gerarem dois perfis de cames, um interior e outro exterior ao rolete.

A figura 64 ilustra o mecanismo came-seguidor cuja came é disco é o seguidor é do tipo translacional de prato concêntrico, ainda nesta figura está representada a inversão do mecanismo came-seguidor, o que significa que a came é fixa e o seguidor move-se relativamente aquela, ou seja, o seguidor roda ângulo (θ) ao mesmo tempo descreve a translação (s) . À semelhança dos mecanismos anteriormente apresentados, no mecanismo da figura 64 o raio de base é (R_b) , o deslocamento do seguidor é (s) e (θ) o ângulo de rotação da came.

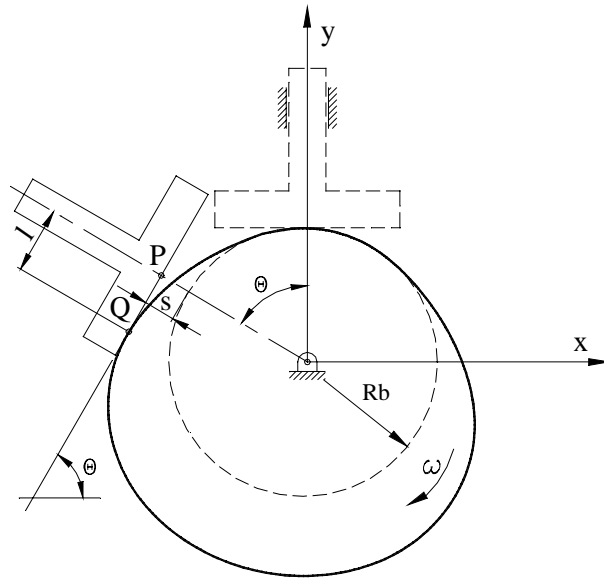


Fig.64 – Mecanismo came-seguidor onde se representa o movimento do seguidor relativamente à came, o qual consiste na translação (s) do prato durante a rotação (θ). O ponto P representa a intersecção da face do seguidor com o seu eixo de translação, e Q é o ponto de contacto entre a came e o seguidor {adaptado de [55]}.

A equação da família de rectas da face do seguidor que geram o perfil da came é dada por:

$$y = m \cdot x + b \quad (57)$$

onde (m) é o declive da recta e (b) é a ordenada na origem.

Atendendo à geometria da figura 64 observa-se que $m = \tan \theta$ e que as coordenadas do ponto P, intersecção da face do seguidor com o seu eixo de translação, são:

$$x_P = -(R_b + s) \cdot \sin \theta \quad (58)$$

$$y_P = (R_b + s) \cdot \cos \theta \quad (58)$$

Substituindo as equações (58) e (59) na equação (57) e resolvendo em ordem a (b) obtém-se:

$$b = \frac{R_b + s}{\cos \theta}$$

Então, a equação (57) pode reescrever-se da seguinte forma

$$y = \frac{x \cdot \sin \theta + (R_b + s)}{\cos \theta}$$

Rearranjando a família de rectas que geram o perfil da came vem que:

$$F(x, y, \theta) = y \cdot \cos \theta - x \cdot \sin \theta - R_b - s = 0 \quad (60)$$

onde (θ) é o parâmetro da família, isto é, cada valor de (θ) define uma recta - posição do seguidor.

Diferenciando a equação (60) resulta:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -y \cdot \sin \theta - x \cdot \cos \theta - \frac{ds}{d\theta} = 0 \quad (61)$$

Resolvendo, simultaneamente, as equações (60) e (61) obtém-se as expressões que definem em cada instante o ponto Q, ou seja, o perfil da came:

$$x_Q = -(R_b + s) \cdot \sin \theta - \frac{ds}{d\theta} \cos \theta \quad (62)$$

$$y_Q = (R_b + s) \cdot \cos \theta - \frac{ds}{d\theta} \sin \theta \quad (63)$$

A dimensão (l) representada na figura 64 pode obter-se pela distância do ponto P ao ponto Q, isto é:

$$l = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \frac{ds}{d\theta} \quad (64)$$

A expressão que traduz o deslocamento do seguidor para o movimento harmónico simples foi apresentada no quadro III da página 76. Atendendo a que a duração do levantamento e do abaixamento é de 180° cada, então $\beta = \pi$, pelo que a expressão do deslocamento será:

$$s = \frac{h}{2} - \frac{h}{2} \cos \theta \quad (65)$$

Derivando a equação (65) em ordem a (θ) vem que:

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{h}{2} \sin \theta \quad (66)$$

Substituindo as equações (65) e (66) nas equações (62) e (63) obtém-se as expressões que definem o perfil da came, ou seja:

$$x_Q = -\left(R_b + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin \theta \quad (67)$$

$$y_Q = \left(R_b + \frac{h}{2}\right) \cdot \cos \theta - \frac{h}{2} \quad (68)$$

Rearranjando as equações (67) e (68) de modo a eliminar a variável (θ) vem que:

$$x^2 + \left(y + \frac{h}{2}\right)^2 = \left(R_b + \frac{h}{2}\right)^2 \quad (69)$$

Pode, então, concluir-se que, para um dado raio de base (R_b), o perfil da came é uma circunferência de centro em $x=0$ e $y=-h/2$ e de raio igual a $R_b + h/2$ (Cf. figura 65).

A largura mínima do prato obtém-se pela aplicação de equação (64), pelo que resulta

$$l_{min} = \frac{ds}{d\theta} = \frac{h}{2} \sin \theta, \text{ cujo máximo ocorre para } \theta = 90^\circ \text{ e } 270^\circ.$$

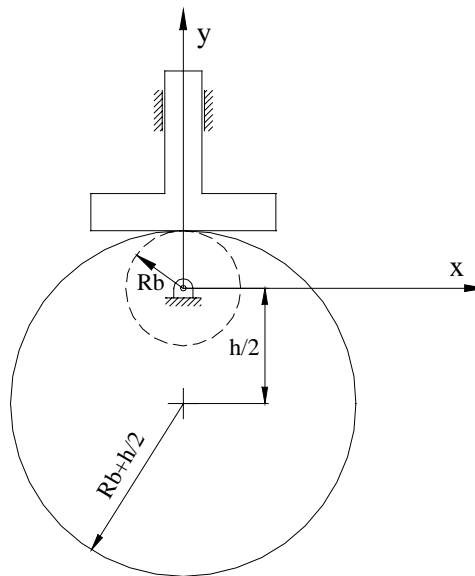


Fig.65 – Mecanismo came-seguidor em que o seguidor é do tipo prato e cujos movimentos de subida e descida são do tipo harmónico simples de duração igual a 180° cada, neste caso a came reduz-se a um excêntrico.

5.2.2. Métodos Gráficos

Para se obter graficamente o perfil de uma came de disco utiliza-se o processo apresentado na secção anterior - o da inversão do mecanismo - ou seja, estuda-se o movimento relativo came-seguidor em que se supõe a came imóvel enquanto o seguidor roda em torno do eixo da came mas em sentido contrário.

Nesta secção apenas se apresenta um caso relativo à obtenção gráfica do perfil da came para o seguidor do tipo translacional de prato, sendo a aplicação deste processo similar para os seguidores de faca e rolete.

Antes de proceder à construção gráfica do perfil da came é oportuno referir como se obtém graficamente o diagrama de deslocamentos do seguidor. Nesta secção apresenta-se somente o diagrama correspondente ao movimento harmónico simples.

O diagrama de deslocamentos para o movimento harmónico simples está representado na figura 66, cuja construção se passa a descrever. Inicialmente desenha-se um rectângulo em que a altura é o deslocamento máximo do seguidor e o comprimento do eixo das abcissas representa o ângulo de rotação da came para esse deslocamento. Após a construção de uma semi-circunferência de diâmetro é igual à elevação (h) do seguidor, divide-se o eixo das abcissas e a semi-circunferência no mesmo número de partes iguais. Pelos pontos daí resultantes traçam-se rectas paralelas e perpendiculares ao eixo das abcissas cujas intersecções definem os pontos do perfil de deslocamentos do referido movimento.

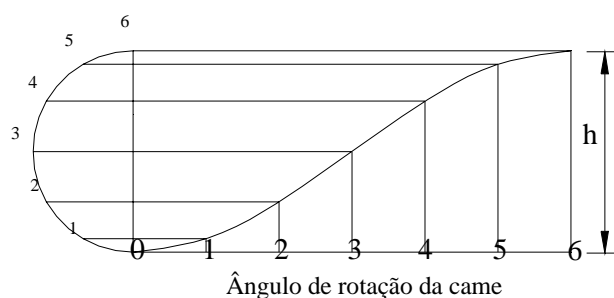


Fig.66 – Construção gráfica do diagrama de deslocamentos relativo ao movimento harmónico simples.

Dos factores que concorrem para a construção gráfica do perfil da came destacam-se: o tipo de diagrama de deslocamentos, o tipo de seguidor e a excentricidade do seguidor. Com efeito, apresenta-se, agora, o processo que permite obter graficamente o perfil da came do mecanismo relativo às seguintes circunstâncias: a came é de disco e roda em torno de O com uma velocidade

angular (ω) constante e o seguidor é de translação do tipo prato cuja direcção do movimento coincide com a do eixo geométrico da came (Cf. figura 67).

O ponto A, ponto de contacto entre o seguidor e a came, é escolhido como ponto de traçagem. Adopta-se ainda uma circunferência de base de raio compatível com o mecanismo e com a amplitude do movimento do seguidor. Esta circunferência e o eixo das abcissas do diagrama de deslocamentos são divididos no mesmo número de partes iguais. As ordenadas correspondentes são, então, transportadas para a respectiva direcção do seguidor.

Aplicando, agora, o método da inversão do mecanismo, significa que para cada posição correspondente às divisões do eixo das abcissas desenha-se um duplicado do seguidor ou, para simplificar, uma recta perpendicular ao seu eixo, obtendo-se, deste modo, as sucessivas posições do seguidor sendo o perfil da came a curva tangente a todas elas.

Os diagramas de velocidades, de acelerações e de impulsos podem obter-se através da diferenciação gráfica do diagrama de deslocamentos.

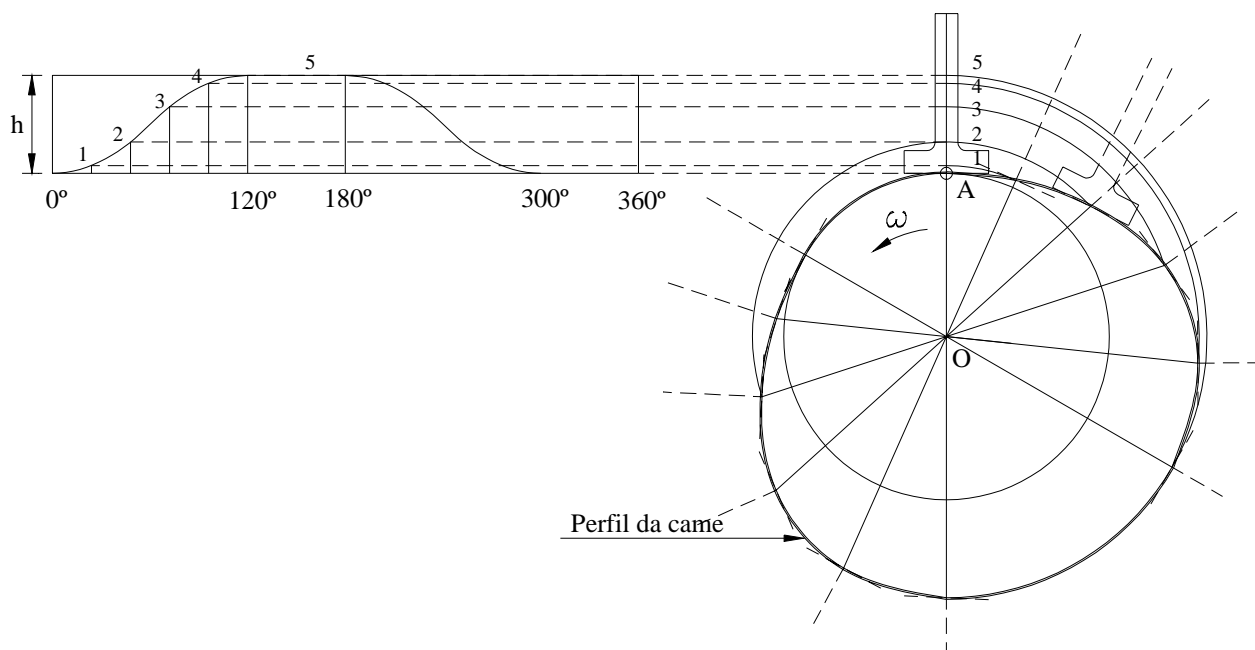


Fig.67 – Determinação gráfica do perfil de uma came de disco cujo seguidor é translacional de prato concêntrico. {adaptado de [1]}

5.2.3. Métodos Computacionais

O programa computacional utilizado na análise cinemática do mecanismo came-seguidor³⁴ foi o Working Model 3D, e cuja metodologia empregue se apresenta de seguida.

A primeira etapa consiste em desenhar o perfil da came (excêntrico) e o seguidor (prato). Para o efeito utilizou-se o programa computacional AutoCAD³⁵ (Cf. figura 68).

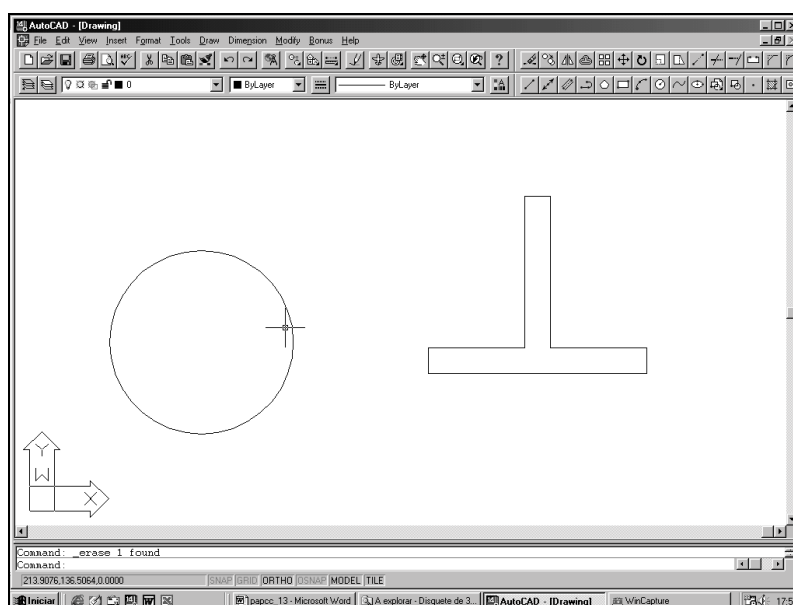


Fig.68 – Definição geométrica do perfil da came e do prato no programa computacional AutoCAD.

Seguidamente, ainda no programa computacional AutoCAD, através da criação de sólidos definiu-se tridimensionalmente a came e o seguidor (Cf. figura 69).

Uma vez definidos geometricamente o seguidor e a came, deve, de seguida, importar-se para o programa computacional Working Model 3D os ficheiros (guardados no formato SAT) que se obtiveram no programa AutoCAD, como ilustra a figura 70.

O programa computacional Working Model 3D, em função da geometria e do material, calcula automaticamente o centro de gravidade, o momento mássico de inércia e o volume de cada corpo.

³⁴ Os mecanismos came-seguidor analisados nesta secção são os mesmos que foram apresentados em 5.1.3. Uma vez que a metodologia é idêntica para os três mecanismos, nesta secção apenas se apresenta o mecanismo came-seguidor em que o seguidor é translacional de prato e a came reduz-se a um excêntrico. Por razões construtivas, e uma vez que a análise é em tudo idêntica, o seguidor de rolete foi substituído por um seguidor de contacto esférico com igual diâmetro.

³⁵ Na presente situação apenas se utilizou o programa computacional AutoCAD para definir geometricamente a came e o seguidor.

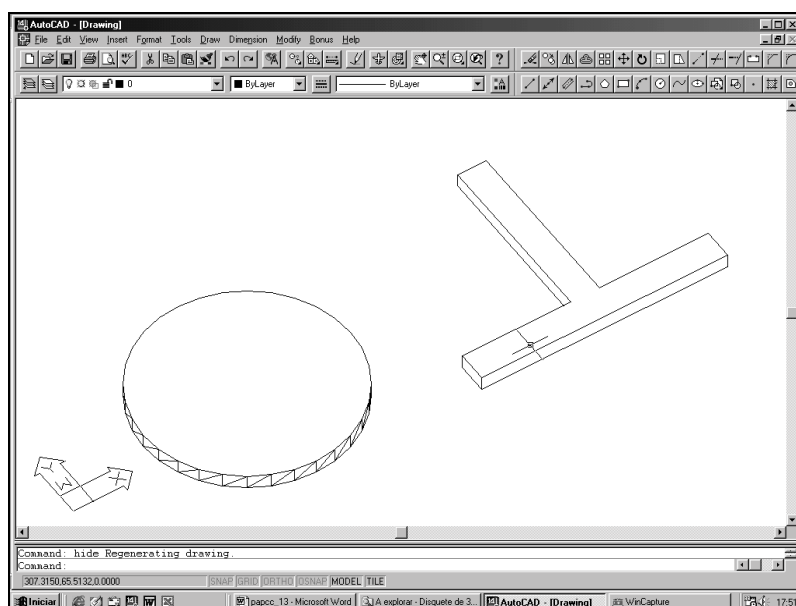


Fig.69 – Definição tridimensional da came e do seguidor, no programa computacional AutoCAD.

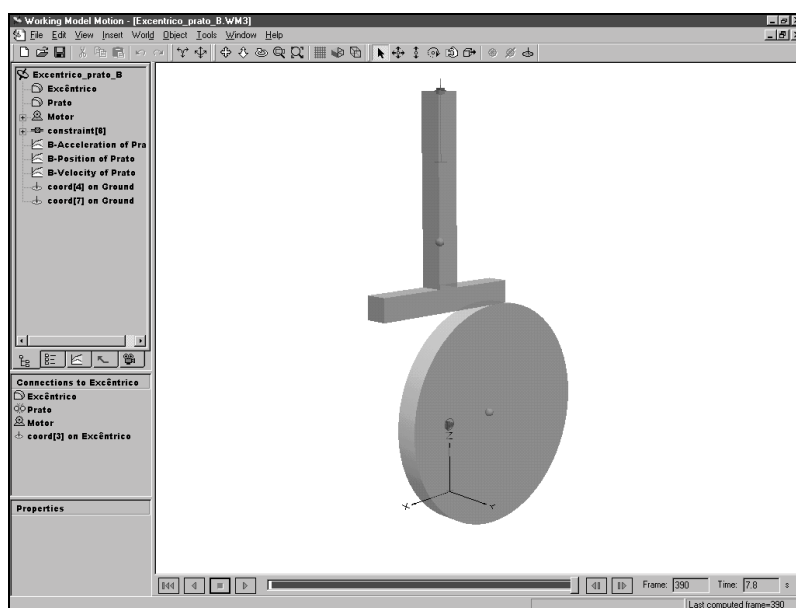


Fig.70 – Importação do seguidor e da came para o programa computacional Working Model 3D.

Após o posicionamento da came e do seguidor, completa-se o mecanismo com todas as suas características, isto é, definem-se os pares cinemáticos, o gerador do movimento, os coeficientes de atrito e de restituição, etc. (Cf. figura 71). Uma característica extremamente importante prende-se com o facto de o programa Working Model 3D ter uma função específica (*smooth collisions*) para a análise de mecanismos do tipo came-seguidor, como mostra a figura 72.

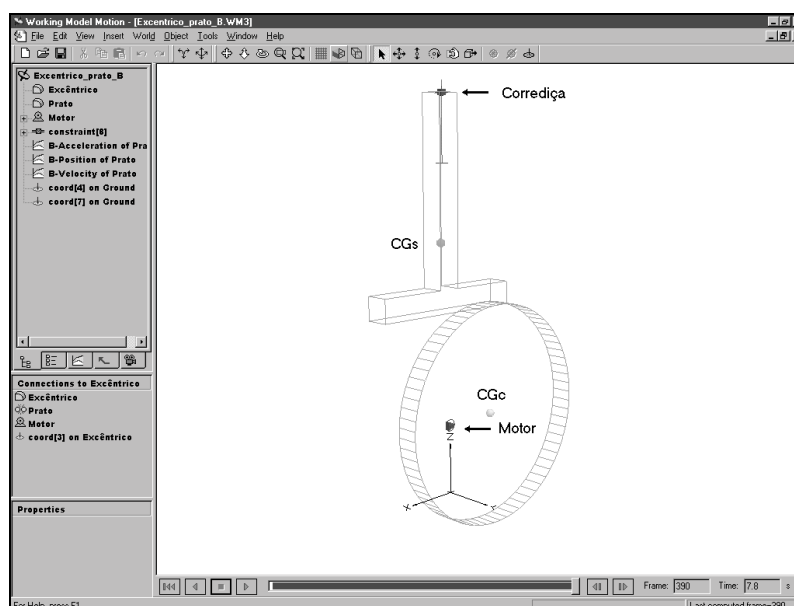


Fig.71 – Definição da corrediça e do gerador de movimento/motor.

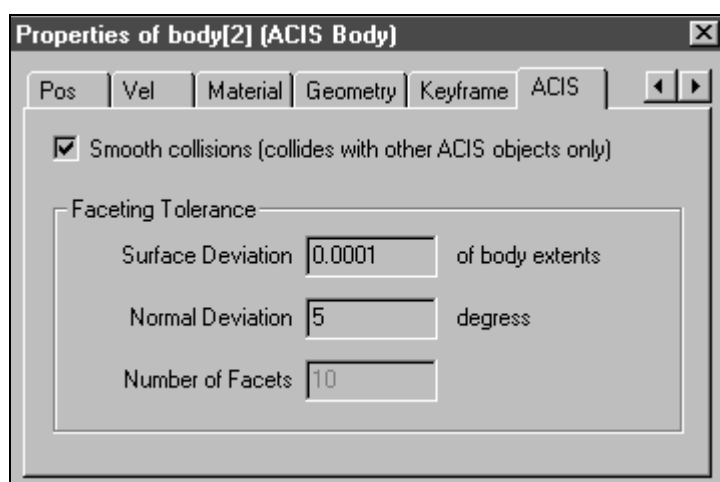


Fig.72 – Função *Smooth collisions* disponível no programa computacional Working Model 3D, que é especialmente indicada para a análise de mecanismos abertos (came-seguidor).

Uma vez definidas as características do mecanismo came-seguidor, pode, agora, proceder-se à sua análise cinemática onde se especificam as variáveis de saída, sendo na presente situação a posição, a velocidade e a aceleração do seguidor. Os resultados obtidos são apresentados no ecrã, sob a forma gráfica ou numérica, ao mesmo tempo em que ocorre o movimento do mecanismo (Cf. figura 73).

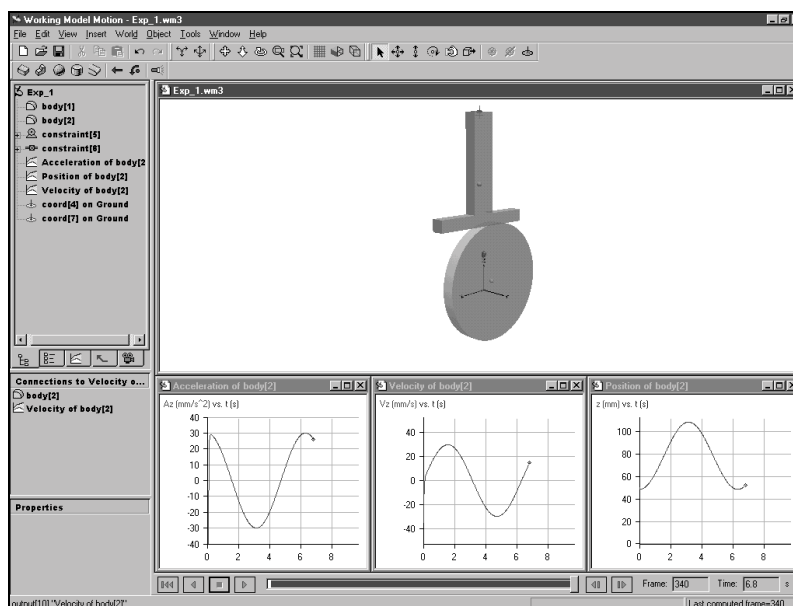


Fig.73 – Análise cinemática do mecanismo came-seguidor onde os resultados estão apresentados na forma gráfica.

Efectuada a análise cinemática é possível guardar os resultados obtidos em ficheiro de texto e em formato vídeo (AVI). A tabela II ilustra, a título indicativo, alguns resultados relativos à posição do seguidor.

Data from C:\USERS\PFlores\Excêntrico_prato
on Thursday, November 24, 1999 11:34:33
Position of coord[9] on prato

t (s)	x (m)	y (m)	z (m)
0.00	0.00000	0.00000	0.05000
0.02	2.95231e-21	-5.51279e-18	0.04988
0.04	-4.46955e-21	-9.51010e-18	0.04989
0.06	-2.47059e-20	-1.11753e-17	0.04993
0.08	-1.22914e-19	-1.20185e-17	0.04997
0.10	-1.47787e-19	-1.25260e-17	0.05004
0.12	-1.25353e-19	-1.26427e-17	0.05014
0.14	-1.31147e-19	-1.26385e-17	0.05017
0.16	-1.02146e-19	-1.27213e-17	0.05025
0.18	-6.21420e-22	-1.29616e-17	0.05031
0.20	-3.55989e-21	-1.29785e-17	0.05041

Tabela II – Ficheiro de texto onde são guardados os resultados obtidos após a análise cinemática do mecanismo.

A figura 74 ilustra três fases do movimento global do mecanismo came-seguidor.

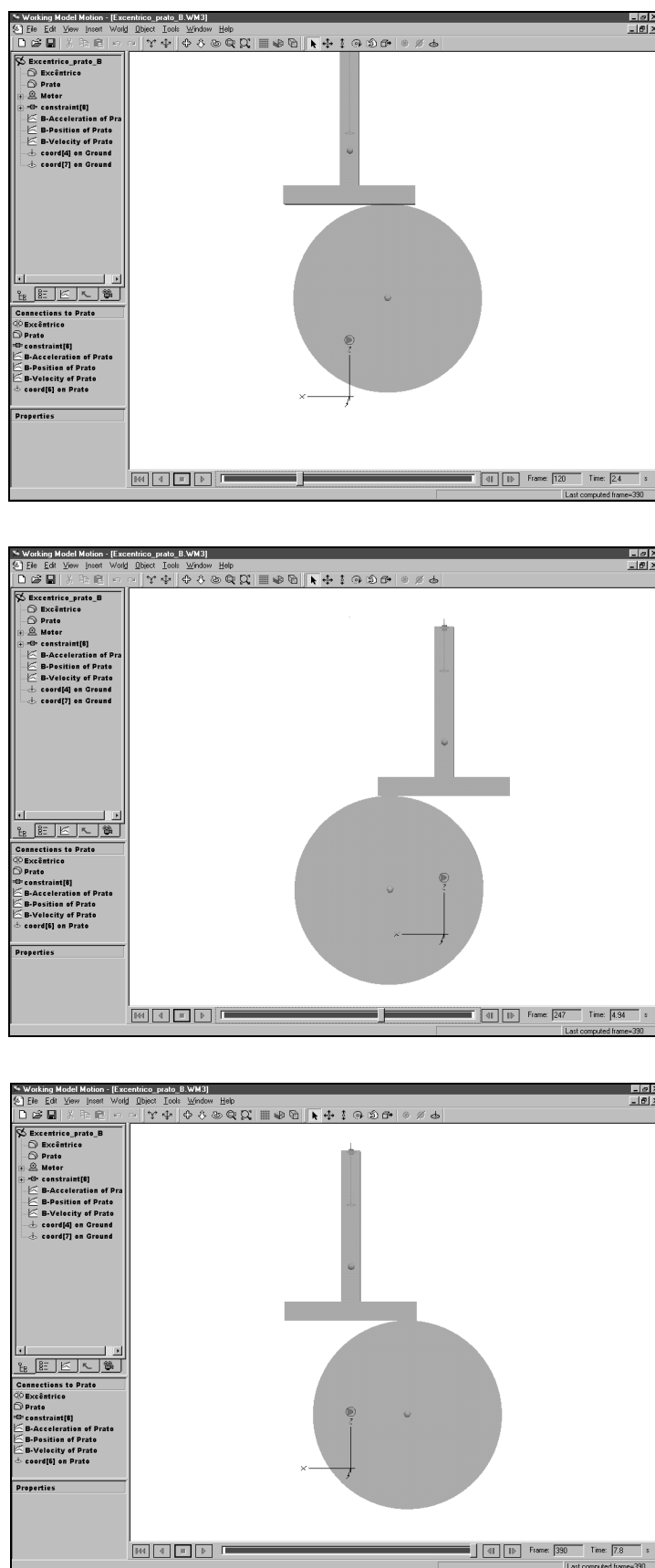


Fig.74 – Três fases do movimento do mecanismo came-seguidor em que o seguidor é translacional de prato, no programa computacional Working Model 3D.

5.3. Análise Dinâmica

5.3.1. Métodos Analíticos

A análise dinâmica dos três mecanismos came-seguidor baseia-se nos conceitos referidos nas secções 4.3.1. e 4.3.2., ou seja, a cada diagrama do corpo livre são aplicadas as condições de equilíbrio dinâmico ou o princípio de D'Alembert.

Uma vez que o raciocínio é tudo idêntico para os três mecanismos, apresenta-se somente a análise relativa ao mecanismo ilustrado na figura 75, onde se considera a existência de uma carga exterior (P). Nesta análise despreza-se o efeito de atrito entre o seguidor (3) e a guia (1).

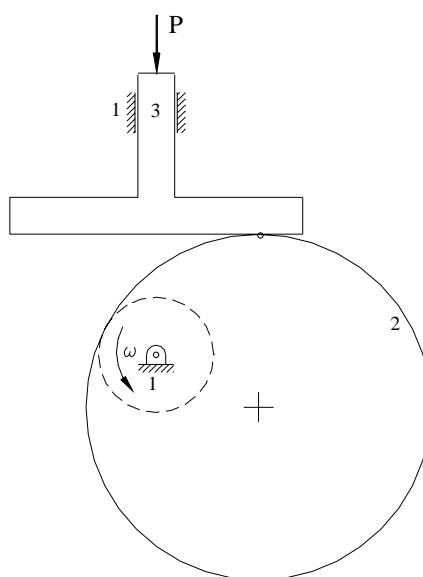


Fig.75 – Mecanismo came-seguidor cuja came é de disco e o seguidor é translacional de prato ou pé plano.

Com efeito, o primeiro passo relativo à análise dinâmica consiste na elaboração dos diagramas do corpo livre do seguidor e da came (Cf. figura 76).

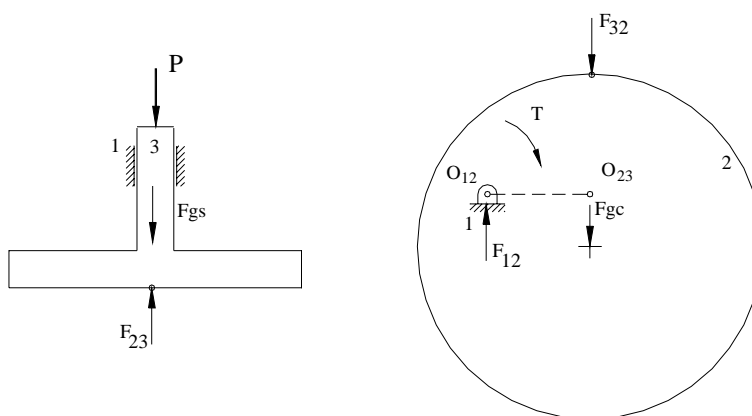


Fig.76 – Diagrama do corpo livre do seguidor e da came; onde (F_{gs}) é a força da gravidade do seguidor, (F_{gc}) é a força da gravidade da came, (P) é a carga exterior, (F_{23}) a força que a came exerce no seguidor, (F_{32}) a força que o seguidor exerce sobre a came e (T) o momento actuante no eixo de rotação da came.

Atendendo a que o centro instantâneo de rotação O_{23} é comum ao seguidor e à came, por definição de CIR, a velocidade do ponto O_{23} é a mesma quer se considere o ponto pertencente a um ou outro corpo, o que significa que

$$v_{O_{23}} = \omega_c \cdot O_{12}O_{23} = v_s$$

então a distância entre os centros O_{12} e O_{23} é dada por:

$$O_{12}O_{23} = \frac{v_s}{\omega_c} \quad (70)$$

Aplicando, agora, o princípio de D'Alembert ou as condições de equilíbrio dinâmico, obtêm-se as seguintes equações:

$$\sum F_s = m_s \cdot a_s \Leftrightarrow F_{23} - P - F_{gs} = m_s \cdot a_s \quad (71)$$

$$\sum T_{O_{12}} = I_{O_{12}} \cdot \alpha \Leftrightarrow T - F_{32} \cdot O_{12}O_{23} - F_{gc} \cdot O_{12}O_{23} = 0 \quad (72)$$

Pela terceira lei de Newton sabe-se que $|F_{23}| = |F_{32}|$, então, resolvendo a equação (71) em ordem a (F_{23}) e, substituindo o resultado obtido na equação (72), resulta a expressão do momento actuante no eixo de rotação da came, ou seja:

$$T_{O_{12}} = (P + F_{gs} + m_s \cdot a_s + F_{gc}) \cdot O_{12}O_{23} \quad (73)$$

Substituindo agora o valor de $O_{12}O_{23}$ dado pela expressão (70), obtém-se:

$$T_{O_{12}} = (P + F_{gs} + m_s \cdot a_s + F_{gc}) \cdot \frac{v_s}{\omega_c} \quad (74)$$

em que:

- (P) é a carga exterior aplicada no seguidor;
- (F_{gs}) é a força da gravidade do seguidor;
- (F_{gc}) é a força da gravidade da came;
- (m_s) é a massa do seguidor;
- (a_s) é a aceleração do seguidor;
- (v_s) é a velocidade do seguidor;
- (ω_c) é a velocidade angular da came.

5.3.2. Métodos Computacionais

A metodologia utilizada na análise dinâmica do mecanismo came-seguidor com auxílio do programa computacional Working Model 3D é em tudo idêntica à que foi apresentada na secção 5.2.3. Nesta secção apenas se apresenta o mecanismo em que o seguidor é de prato.

Assim, tendo em vista o cálculo do momento (T) que actua no eixo de rotação da came, aplica-se uma carga exterior (P) no seguidor (Cf. figura 77).

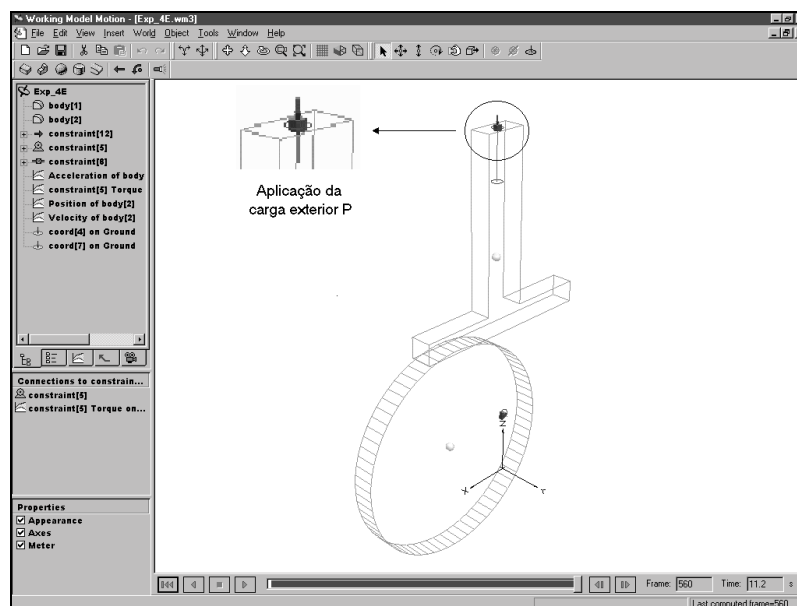


Fig.77 – Aplicação da carga exterior no seguidor, no programa Working Model 3D.

Seguidamente, introduzem-se os valores dos coeficientes de atrito³⁶ e de restituição, os quais na presente situação se consideraram como sendo nulos (Cf. figura 78).

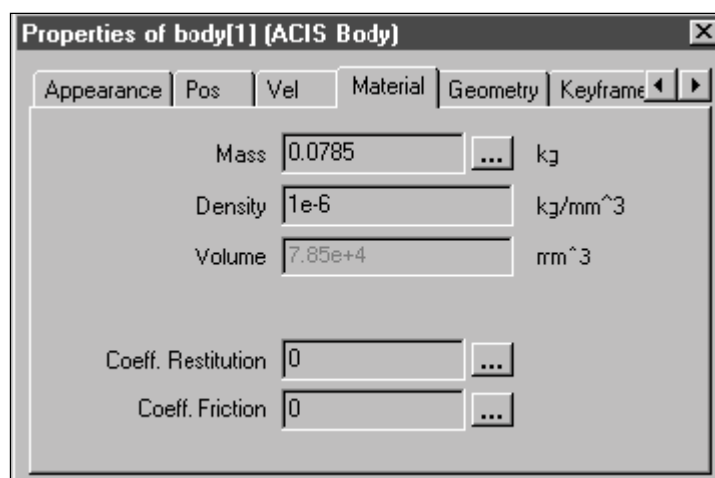


Fig.78 – Introdução dos valores dos coeficientes de atrito e de restituição, no programa Working Model 3D.

³⁶ Por sistema do programa Working Model 3D, os valores dos coeficientes de atrito e de restituição são, inicialmente, iguais a 0,5.

Uma vez definidas as novas características do mecanismo came-seguidor, pode, agora, proceder-se à sua análise dinâmica onde se especifica a variável de saída. No presente exemplo é o momento actuante no eixo de rotação da came - *constraint torque* - (Cf. figura 79).

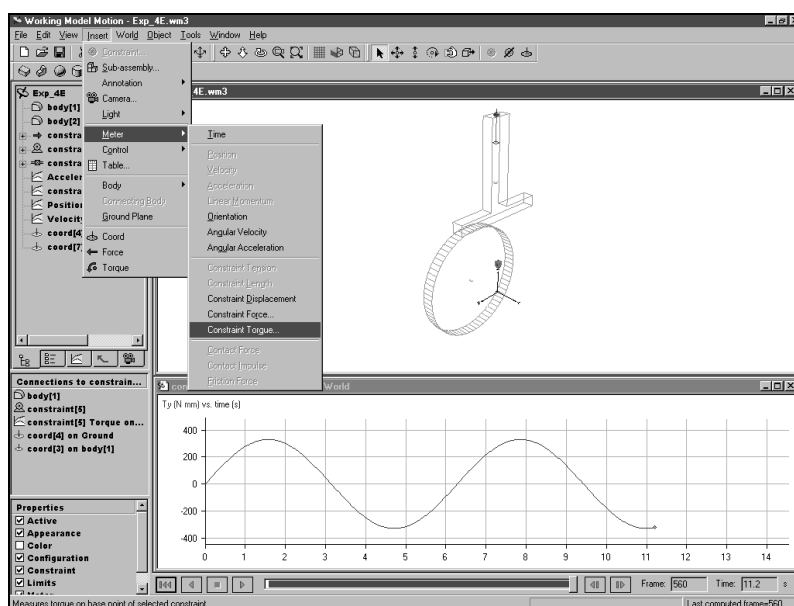


Fig.79 – Análise dinâmica do mecanismo came-seguidor onde se obtém o valor do momento exercido no eixo de rotação da came, utilizando o programa Working Model 3D.

Os resultados obtidos são apresentados no ecrã, sob a forma gráfica ou numérica, ao mesmo tempo em que ocorre o movimento do mecanismo (Cf. figura 79). Posteriormente, os resultados são guardados em ficheiro do tipo texto e em formato vídeo (AVI).

5.4. Aferição dos Resultados

Tendo em vista a aferição dos resultados obtidos pelos diferentes métodos, estudaram-se cinematicamente e dinamicamente os mecanismos came-seguidor descritos na secção 5.1.3. e cujas características básicas são as seguintes:

- came de disco;
- seguidores translacionais do tipo faca, rolete e prato, concêntricos;
- diâmetro da circunferência de base, $\phi_b = 100\text{mm}$;
- deslocamento máximo do seguidor, $h = 60\text{mm}$;
- velocidade de rotação da came, $\omega_C = 1 \text{ rad/s}$;
- massa da came: $m_C = 0,215\text{kg}$
- massa do seguidor: $m_S = 0,008\text{kg}$;
- carga exterior aplicada no seguidor, $P = 1\text{N}^{37}$;
- sequência de movimentos do seguidor: levantamento durante 180° com movimento harmónico simples seguido de abaixamento durante os restantes 180° com movimento harmónico simples;
- coeficiente de atrito came/seguidor, $\mu_{\text{Came/Seguidor}} = 0$.

A figura 80 ilustra um dos referidos mecanismos na posição inicial.

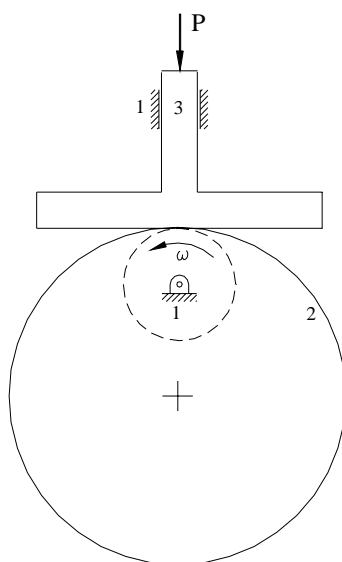


Fig.80 – Mecanismo came-seguidor utilizado na aferição dos resultados.

³⁷ Para o mecanismo cujo seguidor é de faca, a carga exterior é nula. Pois uma carga igual a 1N origina esforços extremamente elevados no motor e na corredeira, tornando a transmissão bastante deficiente.

Os resultados relativos à análise cinemática do movimento do seguidor, para o mecanismo em que o elemento movido é do tipo faca, estão resumidos no quadro V sob a forma numérica e nas figuras 81, 82 e 83 sob a forma gráfica.

Θ [°]	Resultados obtidos pela análise teórica			Resultados obtidos pelo Working Model 3D					
	s [mm]	v [mm/s]	a [mm/s ²]	s [mm]	Dif. [%] *	v [mm/s]	Dif. [%] *	a [mm/s ²]	Dif. [%] *
0	0,000	0,000	30,000	-0,065	-	0,000	-	30,341	-
10	0,456	5,209	29,544	0,396	-13,101	5,269	1,136	29,880	1,136
20	1,809	10,261	28,191	1,765	-2,450	10,377	1,136	28,511	1,136
30	4,019	15,000	25,981	4,000	-0,478	15,170	1,136	26,276	1,136
40	7,019	19,284	22,981	7,034	0,212	19,503	1,136	23,242	1,136
50	10,716	22,981	19,284	10,773	0,531	23,242	1,136	19,503	1,136
60	15,000	25,981	15,000	15,106	0,704	26,276	1,136	15,170	1,136
70	19,739	28,191	10,261	19,899	0,807	28,511	1,136	10,377	1,136
80	24,791	29,544	5,209	25,007	0,874	29,880	1,136	5,269	1,136
90	30,000	30,000	0,000	30,276	0,920	30,341	1,136	0,000	1,136
100	35,209	29,544	-5,209	35,545	0,952	29,880	1,136	-5,269	1,136
110	40,261	28,191	-10,261	40,653	0,975	28,511	1,136	-10,377	1,136
120	45,000	25,981	-15,000	45,446	0,992	26,276	1,136	-15,170	1,136
130	49,284	22,981	-19,284	49,779	1,004	23,242	1,136	-19,503	1,136
140	52,981	19,284	-22,981	53,518	1,014	19,503	1,136	-23,242	1,136
150	55,981	15,000	-25,981	56,552	1,020	15,170	1,136	-26,276	1,136
160	58,191	10,261	-28,191	58,787	1,025	10,377	1,136	-28,511	1,136
170	59,544	5,209	-29,544	60,156	1,027	5,269	1,136	-29,880	1,136
180	60,000	0,000	-30,000	60,617	1,028	0,000	1,136	-30,341	1,136
190	59,544	-5,209	-29,544	60,156	1,027	-5,269	1,136	-29,880	1,136
200	58,191	-10,261	-28,191	58,787	1,025	-10,377	1,136	-28,511	1,136
210	55,981	-15,000	-25,981	56,552	1,020	-15,170	1,136	-26,276	1,136
220	52,981	-19,284	-22,981	53,518	1,014	-19,503	1,136	-23,242	1,136
230	49,284	-22,981	-19,284	49,779	1,004	-23,242	1,136	-19,503	1,136
240	45,000	-25,981	-15,000	45,446	0,992	-26,276	1,136	-15,170	1,136
250	40,261	-28,191	-10,261	40,653	0,975	-28,511	1,136	-10,377	1,136
260	35,210	-29,544	-5,209	35,545	0,952	-29,880	1,136	-5,269	1,136
270	30,000	-30,000	0,000	30,276	0,920	-30,341	1,136	0,000	1,136
280	24,791	-29,544	5,209	25,007	0,874	-29,880	1,136	5,269	1,136
290	19,740	-28,191	10,261	19,899	0,807	-28,511	1,136	10,377	1,136
300	15,000	-25,981	15,000	15,106	0,704	-26,276	1,136	15,170	1,136
310	10,716	-22,981	19,284	10,773	0,531	-23,242	1,136	19,503	1,136
320	7,019	-19,284	22,981	7,034	0,212	-19,503	1,136	23,242	1,136
330	4,019	-15,000	25,981	4,000	-0,478	-15,170	1,136	26,276	1,136
340	1,809	-10,261	28,191	1,765	-2,450	-10,377	1,136	28,511	1,136
350	0,456	-5,209	29,544	0,396	-13,101	-5,269	1,136	29,880	1,136
360	0,000	0,000	30,000	-0,065	-	0,000	-	30,341	-

* Diferença percentual em relação ao valor obtido pela análise teórica.

Quadro V – Resultados obtidos para o deslocamento, a velocidade e a aceleração do seguidor, para o mecanismo em que o seguidor é translacional de faca.

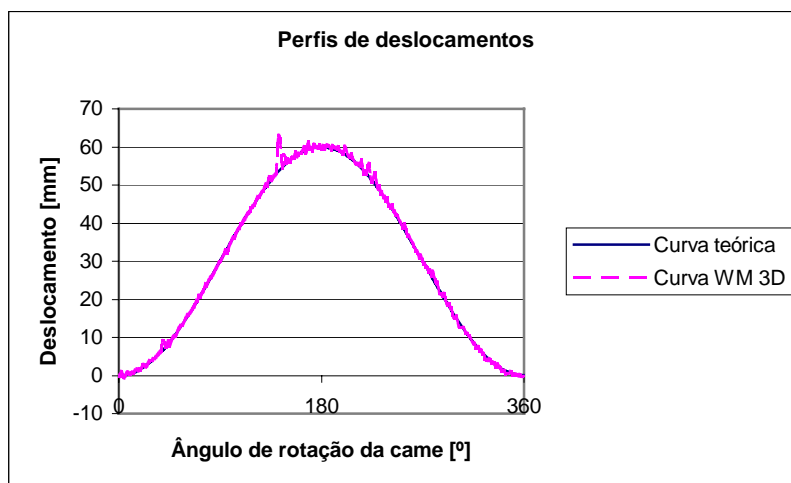


Fig.81 – Perfis de deslocamentos do seguidor obtidos pela análise teórica e pelo programa Working Model 3D para o mecanismo em que o elemento movido é translacional de faca.

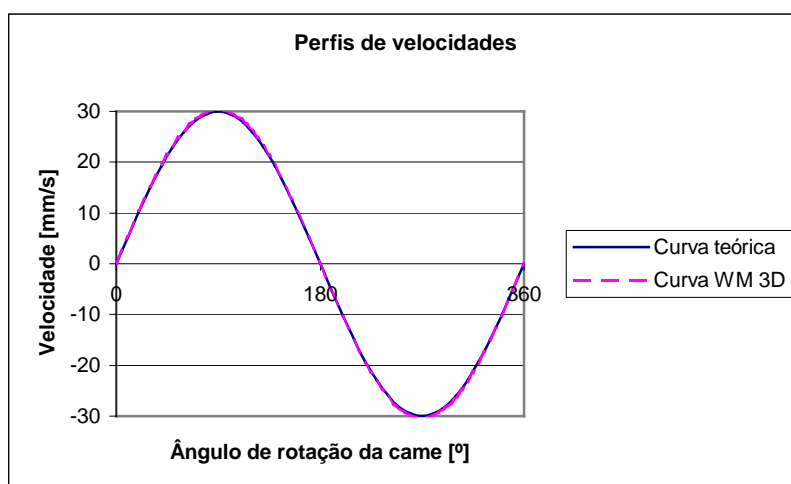


Fig.82 – Perfis de velocidades do seguidor obtidos pela análise teórica e pelo programa Working Model 3D para o mecanismo em que o elemento movido é translacional de faca.

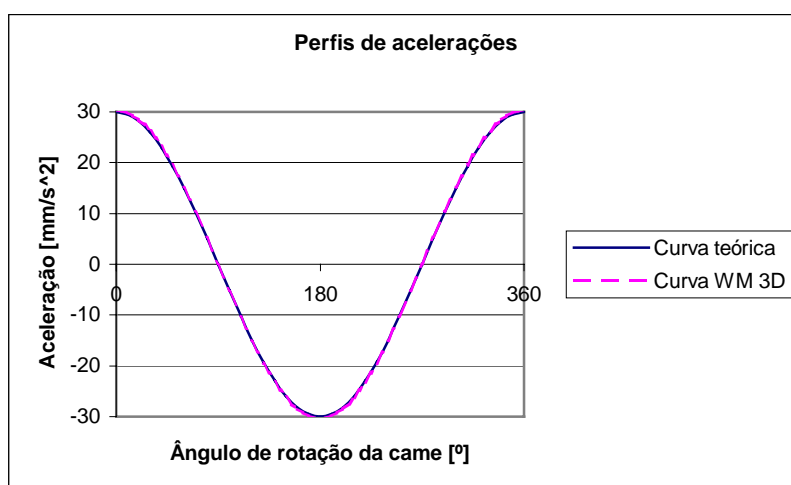


Fig.83 – Perfis de acelerações do seguidor obtidos pela análise teórica e pelo programa Working Model 3D para o mecanismo em que o elemento movido é translacional de faca.

Os resultados relativos à análise cinemática do movimento do seguidor, para o mecanismo em que o elemento movido é do tipo rolete, estão resumidos no quadro VI sob a forma numérica e nas figuras 84, 85 e 86 sob a forma gráfica.

Θ [°]	Resultados obtidos pela análise teórica			Resultados obtidos pelo Working Model 3D					
	s [mm]	v [mm/s]	a [mm/s ²]	s [mm]	Dif. [%] *	v [mm/s]	Dif. [%] *	a [mm/s ²]	Dif. [%] *
0	0,000	0,000	30,000	0,000	0,000	0,000	0,000	29,928	0,239
10	0,456	5,209	29,544	-0,084	-81,579	5,056	-2,937	29,474	0,239
20	1,809	10,261	28,191	1,177	-34,936	10,302	0,400	28,123	0,239
30	4,019	15,000	25,981	3,303	-17,815	15,547	3,647	25,919	0,239
40	7,019	19,284	22,981	6,371	-9,232	19,915	3,272	22,926	0,239
50	10,716	22,981	19,284	10,121	-5,552	23,227	1,070	19,238	0,239
60	15,000	25,981	15,000	14,433	-3,780	26,172	0,735	14,964	0,239
70	19,739	28,191	10,261	19,179	-2,837	28,358	0,592	10,236	0,239
80	24,791	29,544	5,209	24,216	-2,319	29,454	-0,305	5,197	0,239
90	30,000	30,000	0,000	29,951	-0,163	29,854	-0,487	0,000	0,239
100	35,209	29,544	-5,209	34,571	-1,812	29,390	-0,521	-5,197	0,239
110	40,261	28,191	-10,261	39,577	-1,699	28,065	-0,447	-10,236	0,239
120	45,000	25,981	-15,000	44,274	-1,613	25,840	-0,543	-14,964	0,239
130	49,284	22,981	-19,284	48,516	-1,558	22,838	-0,622	-19,238	0,239
140	52,981	19,284	-22,981	52,176	-1,519	19,140	-0,747	-22,926	0,239
150	55,981	15,000	-25,981	55,151	-1,483	14,880	-0,800	-25,919	0,239
160	58,191	10,261	-28,191	57,335	-1,471	10,186	-0,731	-28,123	0,239
170	59,544	5,209	-29,544	58,675	-1,459	5,180	-0,557	-29,474	0,239
180	60,000	0,000	-30,000	59,130	-1,450	0,000	0,000	-29,928	0,239
190	59,544	-5,209	-29,544	58,679	-1,453	-5,169	-0,768	-29,474	0,239
200	58,191	-10,261	-28,191	57,339	-1,464	-10,182	-0,770	-28,123	0,239
210	55,981	-15,000	-25,981	55,152	-1,481	-14,892	-0,720	-25,919	0,239
220	52,981	-19,284	-22,981	52,186	-1,501	-19,150	-0,695	-22,926	0,239
230	49,284	-22,981	-19,284	48,519	-1,552	-22,791	-0,827	-19,238	0,239
240	45,000	-25,981	-15,000	44,275	-1,611	-25,773	-0,801	-14,964	0,239
250	40,261	-28,191	-10,261	39,579	-1,694	-27,992	-0,706	-10,236	0,239
260	35,210	-29,544	-5,209	34,569	-1,821	-29,371	-0,586	-5,197	0,239
270	30,000	-30,000	0,000	29,399	-2,003	-29,791	-0,697	0,000	0,239
280	24,791	-29,544	5,209	24,215	-2,323	-29,347	-0,667	5,197	0,239
290	19,740	-28,191	10,261	19,181	-2,832	-27,978	-0,756	10,236	0,239
300	15,000	-25,981	15,000	14,434	-3,773	-25,838	-0,550	14,964	0,239
310	10,716	-22,981	19,284	10,121	-5,552	-23,153	0,748	19,238	0,239
320	7,019	-19,284	22,981	6,371	-9,232	-19,522	1,234	22,926	0,239
330	4,019	-15,000	25,981	3,301	-17,865	-15,215	1,433	25,919	0,239
340	1,809	-10,261	28,191	1,020	-43,615	-10,662	3,908	28,123	0,239
350	0,456	-5,209	29,544	-0,390	-185,526	-5,437	4,377	29,474	0,239
360	0,000	0,000	30,000	-0,871	-	-0,053	-	29,928	0,239

* Diferença percentual em relação ao valor obtido pela análise teórica.

Quadro VI – Resultados obtidos para o deslocamento, a velocidade e a aceleração do seguidor, para o mecanismo em que o seguidor é translacional de contacto esférico.

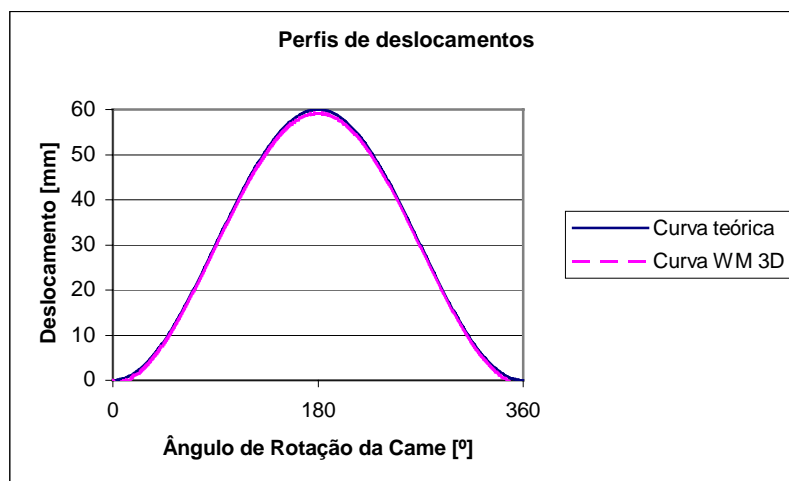


Fig.84 – Perfis de deslocamentos do seguidor obtidos pela análise teórica e pelo programa Working Model 3D para o mecanismo em que o seguidor é translacional de contacto esférico.

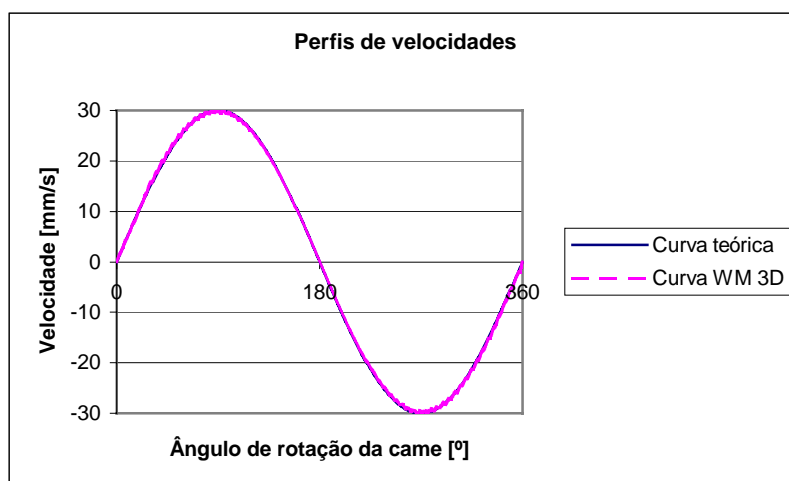


Fig.85 – Perfis de velocidades do seguidor obtidos pela análise teórica e pelo programa Working Model 3D para o mecanismo em que o seguidor é translacional de contacto esférico.

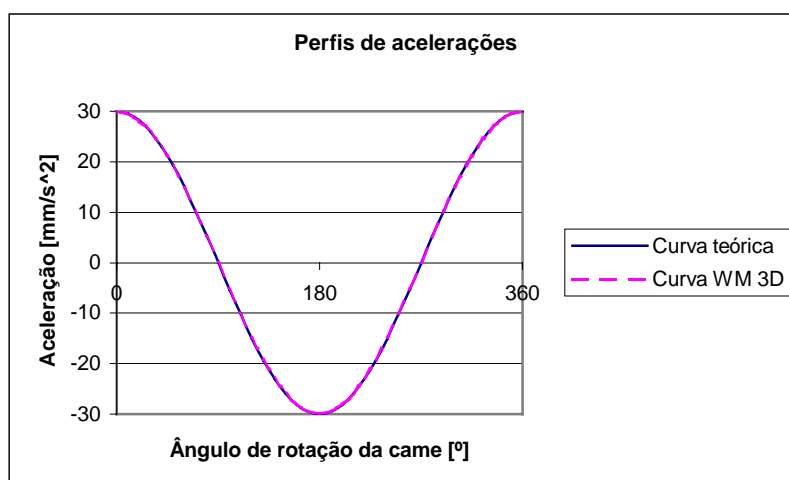


Fig.86 – Perfis de acelerações do seguidor obtidos pela análise teórica e pelo programa Working Model 3D para o mecanismo em que o seguidor é translacional de contacto esférico.

Os resultados relativos à análise cinemática do movimento do seguidor, para o mecanismo em que o elemento movido é do tipo prato, estão resumidos no quadro VII sob a forma numérica e nas figuras 87, 88 e 89 sob a forma gráfica.

Θ [°]	Resultados obtidos pela análise teórica			Resultados obtidos pelo Working Model 3D					
	s [mm]	v [mm/s]	a [mm/s ²]	s [mm]	Dif. [%] *	v [mm/s]	Dif. [%] *	a [mm/s ²]	Dif. [%] *
0	0,000	0,000	30,000	0,000	0,000	0,000	0,000	29,949	-0,170
10	0,456	5,209	29,544	0,358	-21,451	5,222	0,241	29,492	-0,177
20	1,809	10,261	28,191	1,789	-1,118	10,258	-0,025	28,146	-0,159
30	4,019	15,000	25,981	3,924	-2,369	15,010	0,067	25,934	-0,180
40	7,019	19,284	22,981	6,915	-1,477	19,280	-0,019	22,948	-0,145
50	10,716	22,981	19,284	10,222	-4,613	22,987	0,025	19,246	-0,195
60	15,000	25,981	15,000	14,813	-1,247	25,976	-0,018	14,982	-0,120
70	19,739	28,191	10,261	19,643	-0,488	28,173	-0,063	10,294	0,325
80	24,791	29,544	5,209	24,681	-0,442	29,541	-0,011	5,210	0,010
90	30,000	30,000	0,000	29,905	-0,317	29,999	-0,003	-0,005	-
100	35,209	29,544	-5,209	35,095	-0,325	29,545	0,003	-5,195	-0,276
110	40,261	28,191	-10,261	40,161	-0,247	28,189	-0,006	-10,256	-0,044
120	45,000	25,981	-15,000	45,044	+0,098	25,985	0,016	-14,977	-0,153
130	49,284	22,981	-19,284	49,182	-0,206	22,979	-0,010	-19,269	-0,076
140	52,981	19,284	-22,981	52,867	-0,216	19,294	0,054	-22,953	-0,123
150	55,981	15,000	-25,981	55,879	-0,182	15,000	0,000	-25,960	-0,080
160	58,191	10,261	-28,191	58,097	-0,161	10,247	-0,133	-28,172	-0,067
170	59,544	5,209	-29,544	59,442	-0,172	5,211	0,028	-29,519	-0,085
180	60,000	0,000	-30,000	59,899	-0,168	0,000	0,000	-29,976	-0,080
190	59,544	-5,209	-29,544	59,440	-0,175	-5,205	-0,084	-29,520	-0,082
200	58,191	-10,261	-28,191	58,085	-0,182	-10,269	0,083	-28,164	-0,095
210	55,981	-15,000	-25,981	55,875	-0,189	-14,995	-0,033	-25,963	-0,069
220	52,981	-19,284	-22,981	52,876	-0,199	-19,290	0,033	-22,958	-0,102
230	49,284	-22,981	-19,284	49,187	-0,196	-22,976	-0,023	-19,274	-0,050
240	45,000	-25,981	-15,000	44,676	-0,720	-25,983	0,009	-14,982	-0,121
250	40,261	-28,191	-10,261	40,168	-0,230	-28,186	-0,017	-10,262	0,013
260	35,210	-29,544	-5,209	35,104	-0,300	-29,544	-0,001	-5,202	-0,145
270	30,000	-30,000	0,000	29,909	-0,304	-29,999	-0,003	-0,013	-
280	24,791	-29,544	5,209	24,834	+0,175	-29,543	-0,004	5,205	-0,083
290	19,740	-28,191	10,261	19,647	-0,469	-28,196	0,018	10,238	-0,219
300	15,000	-25,981	15,000	14,298	-4,681	-25,980	-0,003	14,978	-0,146
310	10,716	-22,981	19,284	10,605	-1,040	-22,971	-0,045	19,264	-0,101
320	7,019	-19,284	22,981	6,917	-1,450	-19,285	0,007	22,945	-0,158
330	4,019	-15,000	25,981	3,910	-2,720	-14,999	-0,008	25,947	-0,130
340	1,809	-10,261	28,191	1,710	-5,487	-10,269	0,080	28,145	-0,162
350	0,456	-5,209	29,544	0,352	-22,772	-5,199	-0,203	29,499	-0,153
360	0,000	0,000	30,000	-0,109	-	-0,728	-	29,952	-0,160

* Diferença percentual em relação ao valor obtido pela análise teórica.

Quadro VII – Resultados obtidos para o deslocamento, a velocidade e a aceleração do seguidor, para o mecanismo em que o seguidor é translacional de prato.

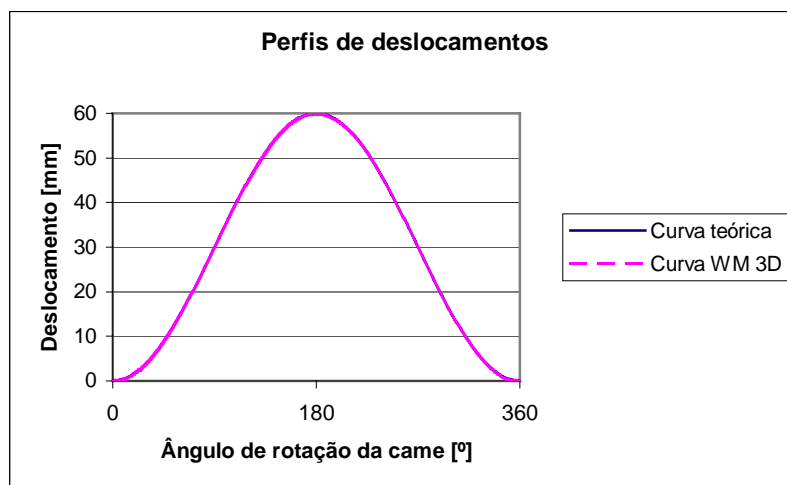


Fig.87 – Perfis de deslocamentos do seguidor obtidos pela análise teórica e pelo programa Working Model 3D, para o mecanismo em que o elemento movido é translacional de prato.

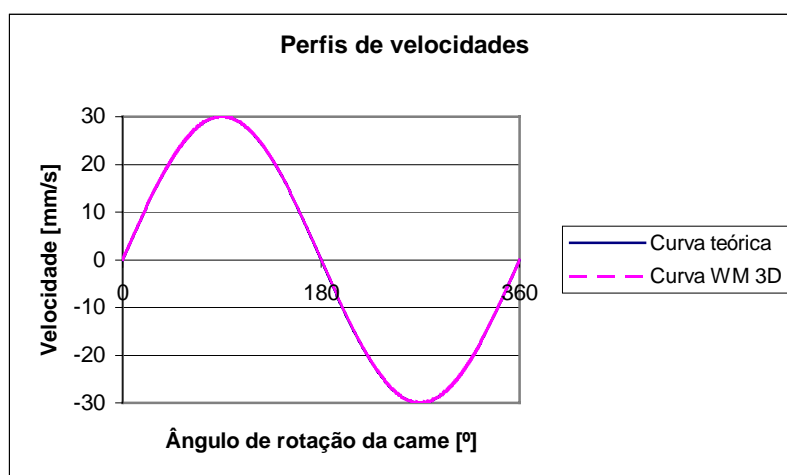


Fig.88 – Perfis de velocidades do seguidor obtidos pela análise teórica e pelo programa Working Model 3D, para o mecanismo em que o elemento movido é translacional de prato.

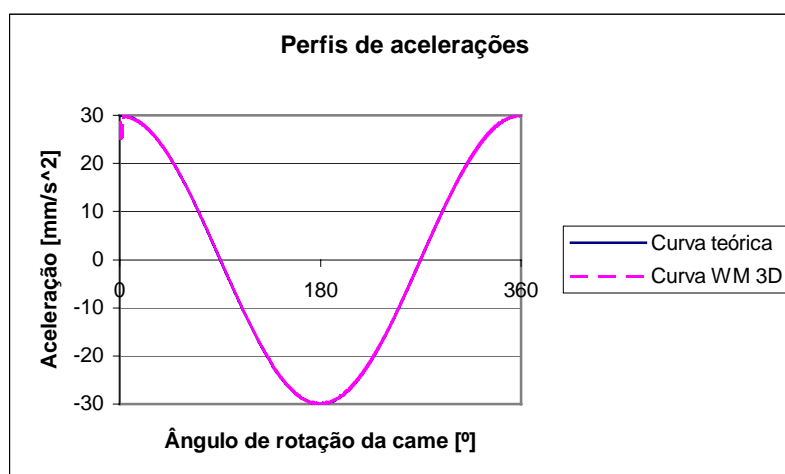


Fig.89 – Perfis de acelerações do seguidor obtidos pela análise teórica e pelo programa Working Model 3D, para o mecanismo em que o elemento movido é translacional de prato.

Na análise e no tratamento dos resultados obtidos pelo programa computacional Working Model 3D verificavam-se alguns oscilações bruscas (*ruídos*) no perfil de deslocamento, principalmente, para os seguidores de faca (Cf. figura 81) e de rolete. No sentido de obter uma função analítica que traduza genericamente o comportamento dos dados utilizou-se o método dos mínimos quadrados aplicado aos dados relativos ao deslocamento, para o seguidor de faca, e à velocidade, para o seguidor contacto de esférico.

Da observação dos quadros V, VI e VII podem tirar-se algumas ilações, das quais se destacam:

- os valores obtidos para a posição, a velocidade e a aceleração do seguidor pela análise teórica e pelo programa Working Model 3D são, em geral, bastante aproximados;
- as diferenças percentuais máximas ocorrem no início e no fim do movimento do seguidor, contudo a diferença absoluta é da mesma ordem de grandeza. Assim, por exemplo, para o seguidor de prato a diferença percentual máxima no deslocamento é de -22,8% e acontece no fim do movimento de descida do seguidor, porém, a diferença absoluta ($\cong 0,1\text{mm}$) é da mesma ordem de grandeza durante todo o movimento;
- o programa admite uma ligeira “penetração” do seguidor na came, uma vez que se verifica que o deslocamento máximo teórico ($h = 60\text{mm}$) não é atingido no programa computacional Working Model 3D. Porém, a diferença entre os deslocamentos máximo e mínimo é bastante aproximada ao valor teórico ($59,899 - (-0,109) = 60,008$) para o seguidor de prato. Para os seguidores de faca e de contacto esférico a “penetração” é superior à verificada no seguidor de prato;
- os resultados obtidos pelo Working Model 3D são, em geral, por defeito.

No atinente à análise dinâmica do mecanismo came-seguidor, designadamente, o cálculo do momento que actua no eixo da came, os resultados obtidos apresentam-se nos quadros VIII, IX e X e nas figuras 90, 91 e 92, respectivamente, para os seguidores de faca, de contacto esférico e de prato.

As principais ilações tiradas relativamente à análise cinemática são extensíveis também à análise dinâmica. Saliente-se apenas que, tal como na análise cinemática, as diferenças são maiores nos mecanismos cujos seguidores são de faca e de contacto esférico.

	Resultados obtidos pela análise teórica	Resultados obtidos pelo Working Model 3D	
Θ [°]	Momento exercido no eixo da came [N·mm]	Momento exercido no eixo da came [N·mm]	Diferença* [%]
0	0,000	0,000	0,000
10	11,394	13,980	22,696
20	22,441	23,608	5,200
30	32,806	30,706	-6,401
40	42,174	40,243	-4,579
50	50,260	47,178	-6,132
60	56,819	53,096	-6,552
70	61,651	57,536	-6,675
80	64,610	60,292	-6,683
90	65,605	61,221	-6,682
100	64,608	60,305	-6,660
110	61,647	57,787	-6,261
120	56,813	53,011	-6,692
130	50,253	49,601	-1,297
140	42,167	40,211	-4,639
150	32,800	30,631	-6,613
160	22,436	21,231	-5,371
170	11,391	10,631	-6,672
180	0,000	0,747	-
190	-11,391	-10,635	-6,637
200	-22,436	-20,939	-6,672
210	-32,800	-30,548	-6,866
220	-42,167	-39,353	-6,673
230	-50,253	-46,594	-7,281
240	-56,813	-53,020	-6,676
250	-61,647	-58,651	-4,860
260	-64,608	-60,295	-6,676
270	-65,605	-61,438	-6,352
280	-64,610	-60,948	-5,668
290	-61,651	-57,190	-7,236
300	-56,819	-53,054	-6,626
310	-50,260	-47,243	-6,003
320	-42,174	-41,461	-1,691
330	-32,806	-30,614	-6,682
340	-2,441	-21,023	-6,319
350	-11,394	-10,767	-5,503
360	0,000	-0,162	-

* Diferença percentual em relação ao valor obtido pela análise teórica.

Quadro VIII – Resultados obtidos para o momento exercido no eixo de rotação na came, para o mecanismo em o seguidor é translacional de faca e $P = 0N$.

	Resultados obtidos pela análise teórica	Resultados obtidos pelo Working Model 3D	
Θ [°]	Momento exercido no eixo da came [N·mm]	Momento exercido no eixo da came [N·mm]	Diferença* [%]
0	0,000	0,000	0,000
10	16,603	16,950	2,090
20	32,701	32,685	-0,049
30	47,806	47,478	-0,686
40	61,458	60,606	-1,386
50	73,242	72,063	-1,610
60	82,800	81,237	-1,888
70	89,842	88,017	-2,031
80	94,154	92,159	-2,119
90	95,605	93,528	-2,172
100	94,152	92,110	-2,169
110	89,837	87,810	-2,256
120	82,794	80,901	-2,286
130	73,235	71,567	-2,278
140	61,450	60,059	-2,264
150	47,800	46,711	-2,278
160	32,697	31,948	-2,291
170	16,600	16,230	-2,229
180	0,000	0,000	0,000
190	-16,600	-16,225	-2,259
200	-32,697	-31,949	-2,288
210	-47,800	-46,721	-2,257
220	-61,450	-60,510	-1,530
230	-73,235	-71,562	-2,284
240	-82,794	-80,905	-2,282
250	-89,837	-87,807	-2,260
260	-94,152	-92,041	-2,242
270	-95,605	-93,499	-2,203
280	-94,154	-92,146	-2,133
290	-89,842	-88,017	-2,031
300	-82,800	-81,220	-1,908
310	-73,242	-71,955	-1,757
320	-61,458	-60,463	-1,619
330	-47,806	-47,299	-1,061
340	-32,701	-32,460	-0,737
350	-16,603	-16,557	-0,277
360	0,000	-0,530	-

* Diferença percentual em relação ao valor obtido pela análise teórica.

Quadro IX – Resultados obtidos para o momento exercido no eixo de rotação na came, para o mecanismo em o seguidor é translacional de contacto esférico e $P = 1\text{N}$.

	Resultados obtidos pela análise teórica	Resultados obtidos pelo Working Model 3D	
Θ [°]	Momento exercido no eixo da came [N·mm]	Momento exercido no eixo da came [N·mm]	Diferença* [%]
0	0,000	0,000	0,000
10	16,603	16,605	0,012
20	32,701	32,698	-0,009
30	47,806	47,809	0,006
40	61,458	61,550	0,150
50	73,242	73,241	-0,001
60	82,800	82,797	-0,004
70	89,842	89,842	0,000
80	94,154	94,153	-0,001
90	95,605	95,602	-0,003
100	94,152	94,148	-0,004
110	89,837	89,840	0,003
120	82,794	82,791	-0,004
130	73,235	73,230	-0,007
140	61,450	61,448	-0,003
150	47,800	47,793	-0,015
160	32,697	32,696	-0,003
170	16,600	16,604	0,024
180	0,000	0,001	-
190	-16,600	-16,601	0,006
200	-32,697	-32,691	-0,018
210	-47,800	-47,801	0,002
220	-61,450	-61,445	-0,008
230	-73,235	-73,233	-0,003
240	-82,794	-82,789	-0,006
250	-89,837	-89,835	-0,002
260	-94,152	-94,151	-0,001
270	-95,605	-95,602	-0,003
280	-94,154	-94,150	-0,004
290	-89,842	-89,843	0,001
300	-82,800	-82,797	-0,004
310	-73,242	-73,239	-0,004
320	-61,458	-61,457	-0,002
330	-47,806	-47,801	-0,010
340	-32,701	-32,703	0,006
350	-16,603	-16,598	-0,030
360	0,000	0,000	0,000

* Diferença percentual em relação ao valor obtido pela análise teórica.

Quadro X – Resultados obtidos para o momento exercido no eixo de rotação na came, para o mecanismo em o seguidor é translacional de prato e $P = 1N$.

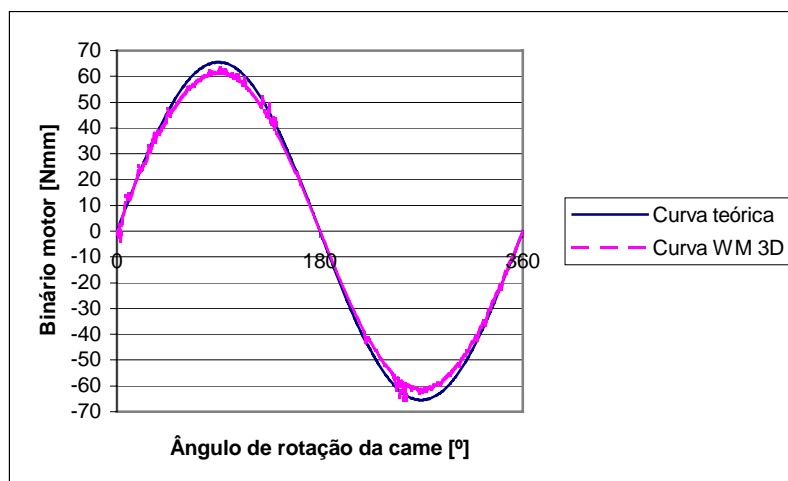


Fig.90 – Gráfico comparativo dos resultados relativos ao momento actuante no eixo de rotação da came, para o mecanismo em que o seguidor é translacional de faca e $P = 0N$.

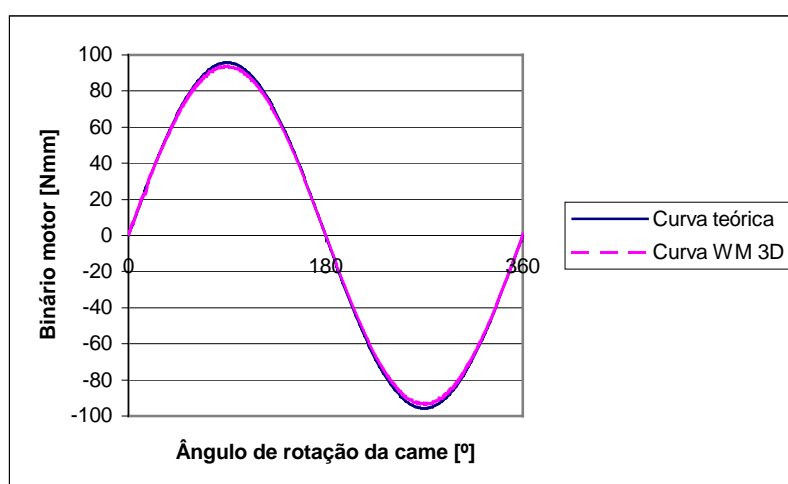


Fig.91 – Gráfico comparativo dos resultados relativos ao momento actuante no eixo de rotação da came, para o mecanismo em que o seguidor é translacional de contacto esférico e $P = 1N$.

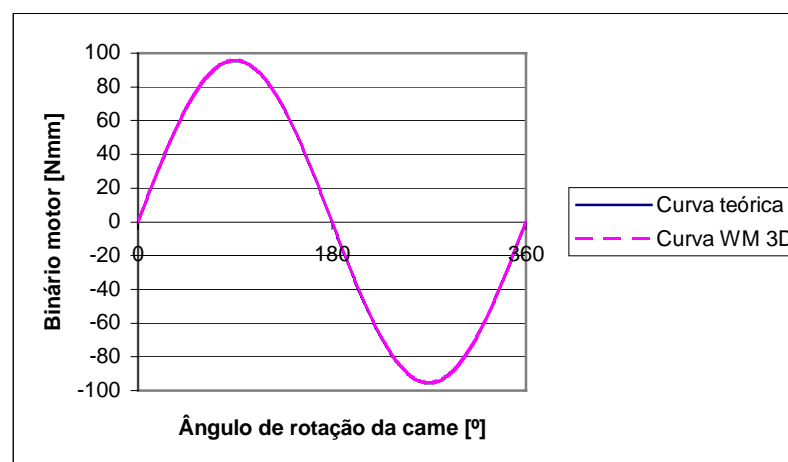


Fig.92 – Gráfico comparativo dos resultados relativos ao momento actuante no eixo de rotação da came, para o mecanismo em que o seguidor é translacional de prato e $P = 1N$.

6. Conclusão

As conclusões mais importantes deste trabalho foram sendo apresentadas ao longo do relatório, sempre que tal se revelou oportuno. Algumas delas merecem, no entanto, uma referência especial.

Assim, de um modo geral quando se pretende efectuar a análise cinemático-dinâmica de apenas uma posição específica do movimento de um mecanismo, os métodos gráficos proporcionam uma solução rápida e com exactidão aceitável. Quando a análise exige o estudo de várias fases do movimento, os métodos analíticos associados ao uso do computador (folhas de cálculo ou programação computacional) são mais indicados do que os métodos gráficos. Porém, quando o grau de complexidade dos mecanismos aumenta, a sua análise, através dos métodos tradicionais (analíticos ou gráficos), torna-se numa tarefa assaz difícil e, por vezes, inviável. De facto, os métodos teóricos, para além de serem trabalhosos e algo morosos, apresentam outros inconvenientes; por um lado, a dificuldade em detectar eventuais erros ocorridos durante a análise e, por outro, não permitem, em geral, a visualização dos resultados obtidos em termos dos movimentos globais dos mecanismos.

Da observação cuidada dos resultados obtidos nos capítulos quatro e cinco podem extrair-se algumas ilações, que, pela sua natureza e conteúdo são, relevantes para a melhor compreensão dos temas versados. Assim, do ponto de vista da análise cinemática do mecanismo biela-manivela e no atinente aos métodos tradicionais de cálculo, o mais utilizado e interessante é o da decomposição do movimento, não só pela sua simplicidade, mas também pelo facto de possibilitar o acompanhamento do movimento global do mecanismo em estudo. Relativamente à análise dinâmica, a complexidade dos esforços que podem estar envolvidos nos mais variados mecanismos pode dificultar a sua identificação e, sobretudo, a sua quantificação, principalmente quando se recorre aos métodos tradicionais. As simplificações que, geralmente, se fazem impedem um estudo mais apurado condicionando, deste modo, o projecto.

No que respeita ao estudo de mecanismos do tipo came-seguidor, os métodos gráficos são os mais comumente utilizados, principalmente quando se opera a velocidades baixas, porque, não só são aplicáveis a qualquer tipo de diagrama de deslocamentos como também possibilitam a visualização do movimento do mecanismo, uma vez que se baseiam no princípio da inversão do movimento.

Os métodos analíticos dedicados ao estudo de cames, especialmente quando estas funcionam a velocidades elevadas, e associados à utilização do computador apresentam algumas vantagens

relativamente aos métodos gráficos, tais como: maior exactidão, maior facilidade de obtenção das características cinemáticas e dinâmicas do movimento, possibilitando, deste modo, estudar a influência dos diversos parâmetros do mecanismo. Não menos importante é a maior quantidade de informação envolvida, podendo esta funcionar como entrada nos programas ou mesmo para o controlo do processo de fabrico em máquinas de comando numérico.

A análise cinemática e dinâmica de sistemas mecânicos com auxílio de ferramentas informáticas especialmente desenvolvidas para este efeito é fundamental na realização de projectos, mormente quando os sistemas são algo complexos, cuja análise tradicional se torna problemática. De facto, os métodos computacionais apresentam inúmeras vantagens das quais, pela sua pertinência se destacam as seguintes:

- a simulação de mecanismos sem necessidade de recurso a protótipos físicos (criação de modelos virtuais);
- a possibilidade de testar diferentes configurações em *ambiente real*;
- a observação da operacionalidade/funcionalidade dos mecanismos;
- a flexibilidade e a facilidade do processamento de informação;
- a menor perda de informação no ciclo de projecto;
- a economia de tempo, de materiais e, consequentemente, de dinheiro;
- a obtenção de projectos mais cuidados e eficientes.

Um outro aspecto importante prende-se com o facto dos métodos tradicionais obrigarem o engenheiro projectista a ter um vasto e profundo conhecimento de áreas distintas. Assim, para além dos conhecimentos relativos à Teoria das Máquinas e dos Mecanismos, torna-se necessário ser especialista noutras áreas, como por exemplo, a Resistência dos Materiais, a Tribologia, a Física, a Matemática, etc. Ao invés, os programas computacionais, vocacionados para a análise de mecanismos, possibilitam, num espaço de tempo razoável e através do método *tentativa-erro*, a obtenção de boas soluções. Com efeito, para além da excelente e agradável interface gráfica ser um precioso factor que ajuda, principalmente, para os menos habilitados/habitados, estes programas conseguem simular as condições reais em que um sistema mecânico opera, abrangendo um vasto leque de aplicações, desde os sistemas mecânicos em geral, à robótica, etc. uma vez que integram num só programa conhecimentos e conceitos relativos a várias áreas.

Em suma, a utilização dos programas computacionais torna-se, já no presente, um facto incontornável e inevitável no contexto da indústria portuguesa, graças, não só à vulgarização da informática mas também aos preços concorrenciais que estes programas apresentam e sobretudo do *hardware*. Uma vertente não menos importante é a que diz respeito ao apoio que tais programas prestam a nível pedagógico (e mesmo em trabalhos de I&D), possibilitando a realização de trabalhos no âmbito da Tecnologia e do Projecto Mecânico.

Referências Bibliográficas

- [1] Albuquerque, O. A. L. P. – Dinâmica das Máquinas – McGraw-Hill, 1974.
- [2] Amorim, D. P. & Amorim, J. B. P. – Lições de Mecânica Racional – 2ª edição, Altlântica, Coimbra, 1954.
- [3] Anand, D. K., Cunniff, P.F. – Enginneering Mechanics Dynamics – Houghton Mifflin Company, Boston, 1973.
- [4] Anvoner, S. – Solution of Problems In Mechanics of Machines – Vol. II , Pitman Paperbacks, 1972.
- [5] Artobolevsk, I. I. – Mechanisms In Modern Engineering Design – Vol. I, II, Lever Mechanisms – Mir Publishers Moscow, 1975.
- [6] Bedford, A. & Fowler, W. – Dynamics – Addison Wesley, 1996.
- [7] Beegs, J. S. – Mechanisms – McGraw-Hill, New York , 1955.
- [8] Beer, F. P., Johnston, E. R. – Mecânica Vectorial para Engenheiros - McGraw-Hill, 1991.
- [9] Beyer, R. – The Kinematics Synthesis of Mechanisms – Chapman & Hall, Ltd, London, 1963.
- [10] Burton, P. – Kinematics and Dynamics of Planar Machinery – Prentice-Hall, New Jersey, 1979.
- [11] Camarão, P.C.B. – Glossário de Informática – Livros Técnicos e Científicos, Editora Ltda, Rio da Janeiro, 1989.
- [12] Chakraborty, J. – Kinematics and Geometry of Planar and Spatial Cam Mechanisms - Willey Easten, 1977.
- [13] Chen , F. Y. – Mechanics and Design of Cam Mechanisms – Pergamon Press, New York, 1982.

- [14] Chironis, N. P. – Mechanisms, Linkages and Mechanical Controls – McGraw-Hill, New York, 1965.
- [15] Chironis, N. P. – Mechanisms & Mechanical Devices Sourcebook – McGraw-Hill, New York, 1991.
- [16] Dijksman, E. A. – Motion geometry of Mechanisms - Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
- [17] Eckhardt, H. D. – Kinematic Design of Machines and Mechanisms – McGraw-Hill, New York, 1998.
- [18] Erdman, A. G. & Sandor, G. N. – Mechanism Design Analysis and Synthesis – Vol. I, 3rd edition, Prentice Hall, 1997.
- [19] Fawcett, J. N. & Burdess, J. S. – Basic Mechanics with Engineering Applications – Edward Arnold, London, 1988.
- [20] Finn, A. – Física – Um Curso Universitário – Vol. I – Mecânica, Editora Edgard Blücher Ltda, 1981.
- [21] Gieck, Kurt – Manual de Fórmulas Técnicas, Dinalivro, 1974.
- [22] Hannah, J. & Hillier, M. J. – Applied Mechanics – Pitman Publishing, 1971.
- [23] Hannah, J. & Stephens, R.C. – Mechanics of Machines, Theory and Examples – Edward Arnold, Ltd, 1986.
- [24] Hartenberg, R. S. & Denavit, J. – Kinematics Synthesis of Linkages, McGraw-Hill, New York, 1984.
- [25] Hartog, J. P. – Mechanics – Dover Publications, New York, 1948.
- [26] Hunt, K. H. – Kinematic Geometry of Mechanisms - Clarendon Press, Oxford, 1978.
- [27] Krutz, G. W., Schueller, J. S., Claar, P. W. – Machine Design for Mobile and Industrial Applications – Society of Automotive Engineers, Inc, 1994.
- [28] Lent, D. – Analysis and Design of Mechanisms – 2nd edition, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1970.

- [29] Levinson, L. – Fundamentals of Engineering Mechanics – Mir Publishers, Moscow, 1970.
- [30] Mabie, H. H, Reinholtz, C. F. – Mechanisms and Dynamics of Machinery – 4th edition, John Wiley & Sons, New York, 1987.
- [31] Martin, G. H. – Kinematics and Dynamics of Machines – McGraw-Hill, New york, 1982.
- [32] McGill, D. J., King, W. W. – Statics and An Introduction to Dynamics - Second edition, PWS-Kent Publishing Company, Boston, 1989.
- [33] Molian, S. – Mechanism Design, The Practical Kinematics and Dynamics of Machinery – 2nd edition, Pergamon, 1997.
- [34] Morais, J. J. L. – Cinemática – UTAD, Série Didática, Ciências Aplicadas – Vila Real, 1994.
- [35] Myszka, D. – Machines and Mechanisms, Applied Kinematic Analysis – Prentice, Hall, Inc, New Jersey, 1999.
- [36] Ouziaux, R. – Mécanique Appliquée – Tome 3, Dynamique des Machines Alternatives Pompes et Compresseurs Volumétriques – Dunold, Paris, 1962.
- [37] Parr, R. E. – Principles of Mechanical Design – McGraw-Hill, London.
- [38] Patton, W. H. – Kinematics – Reston Publishing, 1979.
- [39] Phelan, R. M. – Dynamics of Machinery – McGraw-Hill, London, 1967.
- [40] Phelan, R. M. – Fundamentals of Mechanical Design – McGraw-Hill, 1970.
- [41] Piscounov - Cálculo Diferencial e Integral – Vol. I, Lopes da Silva Editora, 1990.
- [42] Prentis, J. M. – Dynamics of Mechanical Systems - Ellis Horwood - 1986.
- [43] Reuleaux, F. – The Kinematics of Machinery – Dover, New York, 1963.
- [44] Romaus, A. J. – Applied Kinematics – Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1972

- [45] Rothbart, H. A. – Mechanical Design and Systems Handbook – McGraw-Hill, New York, 1985.
- [46] Ryan, D. L. – Computer Aided Kinetics for Mechine Design – Marcel Dekker Inc., New York, 1981.
- [47] Santos, F. Borja – Sebenta de Matemáticas Gerais, Primitivas e Integrais – Plátano Editora, 1992.
- [48] Schwamb, P., Merrill, A. L., James, W. H. – Nociones de Mecanismos - Tolle, Lege, Aguilar, 1973.
- [49] Shigley, J. E. – Dynamics Analysis of Machines – McGraw-Hill, New York, 1961.
- [50] Shigley, J. E. – Kinematics Analysis of Mechanisms – McGraw-Hill, New York, 1969.
- [51] Shigley, J. E. & Uicker, J. J. – Theory of Machines and Mechanisms – McGraw-Hill, 1995.
- [52] Sloane, A. – Engineering Kinematics – The MacMillan Company, New York, 1959.
- [53] Soni, A. H. – Mechanism Syntesis and Analysis - Scripta Book Company, Washington, 1974.
- [54] Targ, S. – Curso Técnico-prático de Mecânica - Lopes de Silva Editora, 1976.
- [55] Wilson, C. E., Salder, J. P. – Kinematics and Dynamics of Machinery – 2nd edition, Harper Collins College Publishers, New York, 1993.